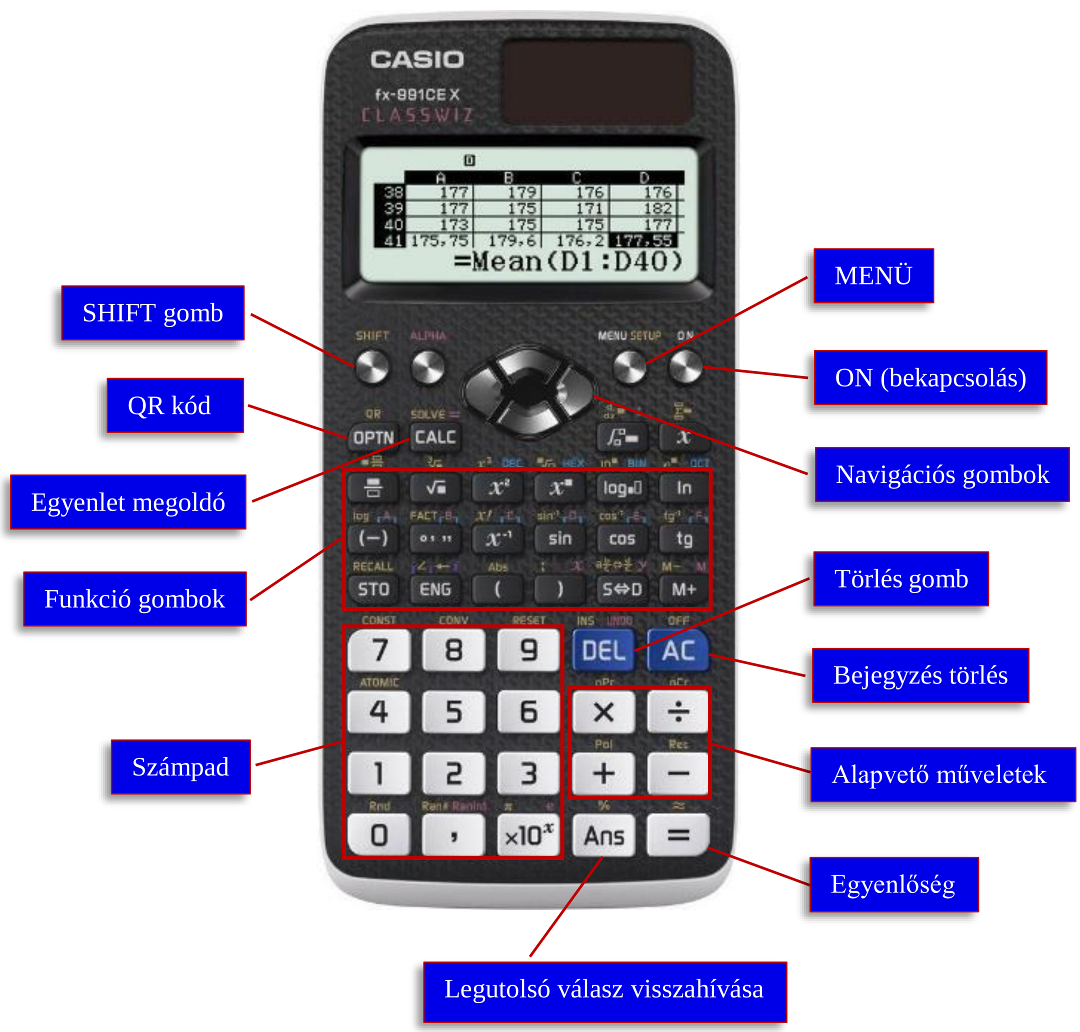
MATEMATIKA

A CASIO fx-991CE X

felfedezése matematika érettségi feladatokkal



2018. Marcius 3.

Tartalomjegyzék

Ignácz György

középiskolai matematika tanár

Előszó

Matematika oktatásunkban a számológép-használat jelentősége és szerepe az utóbbi időben nőtt, ugyanakkor az érdeklődő diákok, tanárok vagy szülők számára a jelenleg elérhető magyar nyelvű források kimerülnek a számológépekhez tartozó felhasználói kézikönyvekben. Épp ezért szükségesnek éreztem egy olyan jegyzet megírását, amely közép - és emelt szintű érettségi feladatok megoldásával mutatja be a Casio fx-991CE X számológép használatát.

Ezen jegyzet fő célja, hogy azon túl, hogy bemutatja az fx-991CE X alapvető funkcióit, útmutatót adjon a számológéppel történő feladatmegoldáshoz. Mindenek felett azonban bíztatom az olvasót, hogy oldja meg a saját matematikai problémáit a Casio fx-991CE X számológéppel!

A megoldások során nem törekedtem a legrövidebb megoldásra, vagy ismert, illetve kevésbé ismert trükkök alkalmazására, még akkor sem, ha ez jelentősen leegyszerűsítette volna a megoldást. Három témakör kerül bemutatásra: Egyenletek / Egyenlőtlenségek, Statisztika és Analízis.

A jegyzet elsősorban tanárok számára készült de haszonnal forgathatják azok a diákok is, akiket érdekel a számológéppel történő feladatmegoldás. Kérem, hogy az olvasó tekintse ezt a jegyzetet egy első próbálkozásnak, egy dinamikus tartalomnak, amely a visszajelzések és javaslatok alapján folyamatosan változik majd.

Javaslatait és elképzeléseit szívesen várom az alábbi e-mail címen:

mathcrutch@gmail.com

Honlap: https://mathcrutch.com

NÉHÁNY GONDOLAT A SZÁMOLÓGÉP-HASZNÁLATRÓL

A számológéppel történő tanításnak hazánkban nincs pedagógia történe. Vajon a diákok számára a számológép-használat több előnnyel jár, mint hátránnyal? Nos, tíz évvel ezelőtt a számológéppel kapcsolatban aligha gondoltunk nagy felbontású kijelzőre, újszerű beviteli módra vagy táblázat-kezelő funkcióra. Régi szemléletünkben a számológép sokkal egyszerűbb, összehasonlítva az utóbbi időben végbemenő dinamikus fejlesztés és verseny eredményeképpen megjelenő modern számológéppel. Úgy gondolom, hogy osztálytermi környezetben a modern számológépek sokkal jobban elősegítik a pedagógiai tartalomra és a kritikus gondolkodásra való fókuszálást.

Évtizedekig az algebrában a négyzetgyökvonáshoz táblázatot használtunk. A tanár tiltotta, hogy a diák számológépet használjon, ugyanakkor matematika oktatásunk - azon a szinten - nem tartalmazta annak magyarázatát, hogy miért úgy keressük ki a megfelelő értékeket. Hasonlóképpen tanították a trigonometriát is. Megtanultuk használni ezeket a táblázatokat anélkül, hogy bármit is megértettünk volna az alkalmazott procedúrából. Ez a típusú tanítási módszer a kreatív gondolkodás fejlesztése helyett a rutinszerű módszerekre korlátozódott.

Manapság természetes, hogy számológépet használunk a négyzetgyökvonáshoz vagy a szinusz, koszinusz és más trigonometrikus függvényekhez. Elfogadjuk, hogy a számológép-használat ezen műveletekhez – és más műveletekhez is - több előnnyel jár, mint hátránnyal.

A számológép nem gondolkodik a diák helyett. A diák gondolkodik, és oldja meg a matematikai problémát. A számológép egy jól felhasználható, hasznos eszköz, amely pontosan azokat a műveleteket hajtja végre, amelyeket a diák a számológépbe beír. A diáknak kell értelmeznie a problémát, és neki kell megtalálnia a helyes számokat, egyenleteket, függvényeket stb.

Manapság a tanulók sokféle szoftverhez (Windows, Linux, Word stb.) hozzáférnek, amelyek az oktatás fontos részét képezik. Ezek a programok - a számológépekhez hasonlóan - csak asszisztálnak a munkához, a megoldás azonban a megadott információktól függ.

A fx-991CE X számológép jelentősen meggyorsítja a tanulási folyamatot, így a diáknak több ideje van megismerni érdekes matematika problémákat és felfedezni mintákat a matematikában. A számológép-használat a diák magabiztosságát is erősíti a jelenleg elérhető technikai eszközök alkalmazásában, csak gondoljunk a modern telefonokra és az érintőképernyős eszközökre! A diákok megszokták, így könnyebb dolgozniuk hasonló eszközökkel. A számológépek nagyon hasznosak hiszen hordozhatók, megfizethetők és azonnal használatra készek! Ugyanakkor érthető, hogy a tanárok vagy szülök félnek a számológép használattól. Ez abból a tapasztalatból jön, hogy megszokták, hogy egy művelet eredménye csak hosszú, nehéz (manuális) számítás után kapható meg. Mindazonáltal elfelejtik, hogy a hiba lehetőségek száma ez esetben számottevő.

Sok szerencsét kívánok a problémamegoldáshoz az fx-991CE X számológéppel!

EGYENLETEK / EGYENLŐTLENSÉGEK

Egyenletek Equations Rovnice Ligninger Ekvacioj Yhtälöt

Equations Εξισώσεις समीकरण 方程式 方程 Równania

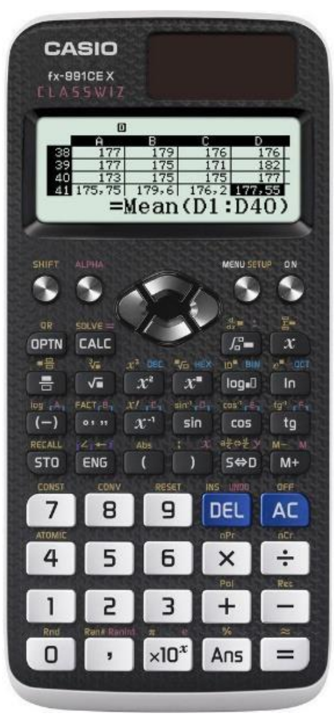
Gleichungen уравнения Ecuaţiile Ecuaciones

Ekvationer Rovnice

Рівняння

CASIO

fx-991CE X



A FELADATOK LISTÁJA

A következő feladatok az egyenlet grafikus megoldásának fontosságát hivatottak szemléltetni. A QR kód használatával a függvény grafikonja rögtön elérhető, így a megoldáshoz tartozó közelítő szám könnyen leolvasható. Ugyanakkor a legtöbb feladat azonosságok alkalmazásával is megoldható. Mindazonáltal, azt gondolom, hogy az Egyenlet / Egyenlőtlenség témakör kezdetén a grafikus megoldás fontosabb, hiszen a diák egyszerre láthatja a függvény képét, a függvény értelmezési tartományát és más jelemzőit úgymint szélsőérték, *x* és *y* tengely metszéspontok stb. Habár, a legtöbb esetben a beépített egyenletmegoldó funkciót is alkalmazom.

Az algebrai (azonosságokon alapuló) megoldás számológéppel is előkészíthető. Ennek a jegyzetnek nem célja ezt bemutatni, de néhány dologra szeretném felhívni a figyelmet.

A) $\log(xy) = \log x + \log y$

B) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$

A fenti két esetben az azonosságok érvényessége sok példával illusztrálható. A tanulók az azonosságokat jogszerűségét játékos példákkal fedezhetik fel. Természetesen ez nem bizonytás, de legalább is látványos. Speciális esetek, például *x*=*y* vagy gyakori hibák, például

$\log(xy) = \log x \cdot \log y$ vagy $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$ könnyen demonstrálhatók szintén.

A számológéppel történő játékos megközelítés sokat segít a logaritmus fogalmához. Javaslat: alakítsunk ki csoport munkát a diákok között (maximum 3-4 fő) A tanár leírja a kiszámítandó logaritmust a táblára és megkéri a csoporttagokat, hogy írják le a logaritmus közelítő értékét. A tanár röviddel később leírja a megoldást a táblára és az, akinek a csoporton belül a legjobb a közelítése az mehet tovább a következő körre. A játék addig folytatódik amíg két személy marad. A közöttük lévő utolsó mérkőzés a játék vége.

1 Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\lg(2x-1)+\lg(2x-3)=\lg 8$

Első módszer

Határozzuk meg a bal oldal értelmezési tartományát!

$\log_a b$ értelmes, ha $a>1$, $a\neq 1$ és $b>0$. A logaritmus alapja 10.

További feltételek:

$2x-1>0$ és $2x-3>0 \Leftrightarrow x>3/2.$

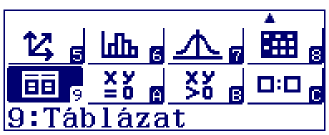
A gyökök helyzetét jobban látjuk, ha felrajzoljuk a két oldalhoz tartozó függvények grafikonját.

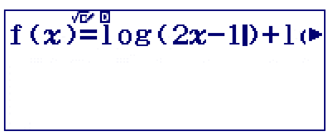
Legyen

$f(x)=\lg(2x-1)+\lg(2x-3)$ és $g(x)=\lg 8$

Nyomjuk meg a MENU-t, és válasszuk a *Táblázat*-ot (vagy írjunk 9-et).

Ezt követően adjuk meg a két függvényt!

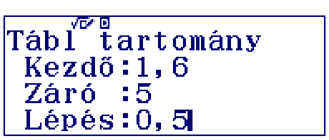


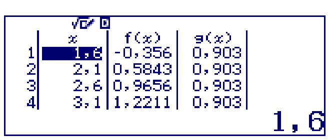


Ami az *x* változót illeti, nyomjuk meg az ALPHA és) (x) gombokat vagy csak x-et.

Megjegyzés: a 10-es alapú logaritmus log $(\log_{10} a=\lg a)$, minden más esetben a $\log_{\square}\square$ gombot használjuk.

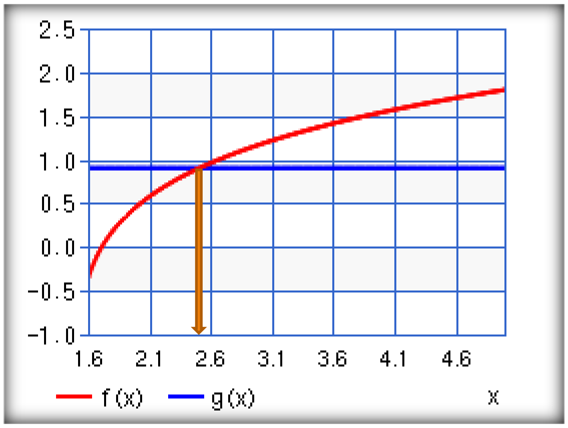
Nyomjunk = -t és változtassuk meg a **Kezdő**, a **Záró** és a **Lépés** értékeket rendre 1,6; 5 és 0,5-re (a minimum érték – az egyenlet értelmezési tartományának megfelelően – 1,5-nél nagyobb kell, hogy legyen.) Az = megnyomása után az aktuális függvényértékek táblázata jelenik meg:





A QR kódhoz nyomjuk meg a SHIFT és OPTN gombokat.

A függvény képéhez a QR kódot mobiltelefonnal kapjuk meg vagy ha ClassWiz emulátorral dolgozunk, úgy nyomjuk meg egyszer a QR kódot. Egy új lap fog megjelenni.



Ahogy az látható, **a megoldás 2,5.**

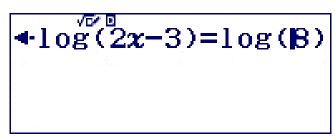
Megjegyzés: Mindig vessük össze a megoldást a feltétellel, a továbbiakban ezt feltesszük.

Az egyenlet bal oldala növekszik, ugyanakkor a jobb oldala állandó. Egy megoldás várható.

A megoldást az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve láthatjuk, hogy az kielégíti az egyenletet. Azt is láthatjuk, hogy nincs más megoldás.

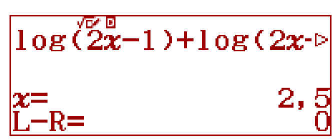
Második módszer

Az *x* változót használva írjuk be az egyenletet úgy, ahogy az megjelenik. Ami az '=' –t illeti, nyomjuk meg az ALPHA és CALC gombokat ebben a sorrendben.



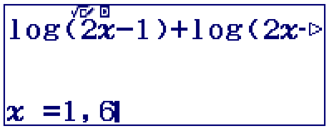
Az egyenlet megoldáshoz a SHIFT és CALC (Solve) gombokat használjuk majd az = -t.

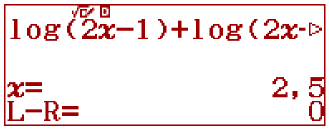
A megoldás egy kis idő múlva jelenik meg:



Honnan tudjuk, hogy nincs több megoldás? Játszunk egy kicsit!

Nyomjuk meg az ⊜-t újra, és válaszunk egy 2,5-nél kisebb (vagy nagyobb) értéket. A számológép egy másik megoldást keres, közel a megadott értékhez. Például, írjunk 1,6-t, majd nyomjunk ⊜-t.





A megoldás nem változott.

Ha egy másik – különböző – számmal próbálkozunk, például 10-zel (nagyobb, mint 2,5) a megoldás akkor sem változik.

Megjegyzés 1: az első megoldáshoz tartozó grafikon jól mutatja, hogy egy megoldás van. Ez nem mindenki számára nyilvánvaló.

Megjegyzés 2: a közelítéshez jó számot választani nem könnyű. Segíthet a két oldalhoz tartozó függvény grafikonja és a függvények tulajdonságainak ismerete. A számológép a *Newton-Raphson* numerikus módszert használja az egyenlet megoldásához.

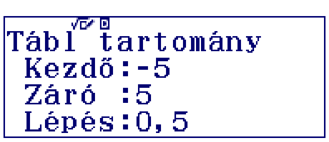
▼ Adjuk meg a következő egyenletek megoldásait:

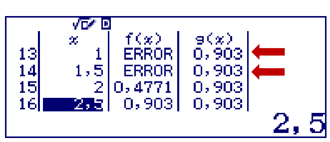
a. $\lg(14-x)=2\lg(2x-4)-\lg(3x-11)$

b. $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$

c. $\log_3 x+\log_9 x=6$

A táblázathoz tartozó tartomány lehetett volna a $[-5;\ 5]$ intervallum. Ebben az esetben a számológép hibát mutat bizony x értékekre és a program nem rajzolja fel a függvény képét sem (*hibaüzenet: an unsupported parameter is specified*). Így, a megfelelő értelmezési tartomány, a függvény képe és az egyenlet megoldása egyszere jelent meg a feladatmegoldás során.





2

Egy háromszög x szöge kielégíti a következő egyenletet: $4\cos^2 x - 8\cos x - 5 = 0$.
Adjuk meg az x értékét!

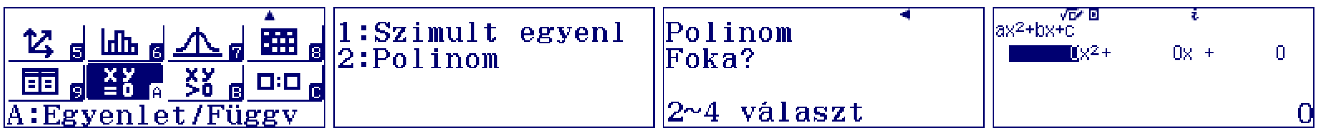
Első módszer

A szög egysége fok (DEG, °).

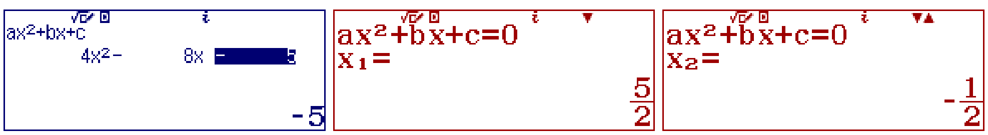
Az $y = \cos x$ helyettesítéssel az egyenlet másodfokú lesz:

$4y^2 - 8y - 5 = 0$.

Használjuk a beépített másodfokú egyenlet megoldó funkciót:

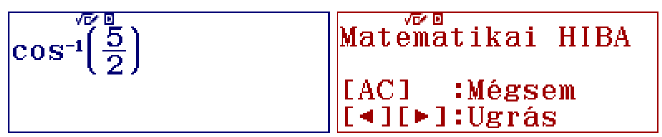


Változtassuk meg az együtthatókat, majd nyomjunk =-t.



A megoldások $y_1 = \frac{5}{2}$ és $y_2 = -\frac{1}{2}$

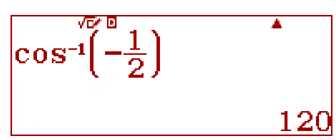
a. $y_1 = \frac{5}{2} = \cos x$

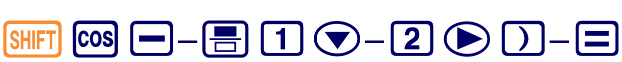


(A kívánt x nem létezik, mert a cos függvény értékkészlete a $[-1;\ 1]$ intervallum.)

b. $y_2 = -\frac{1}{2} = \cos x$

Határozzuk meg a koszinusz inverzét:



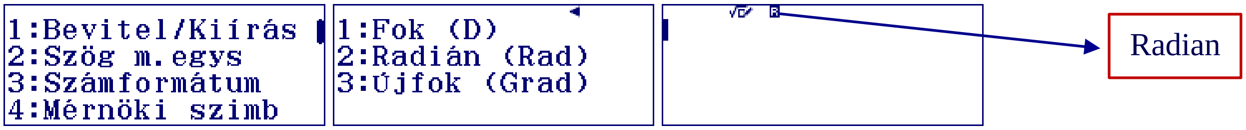


Megoldás: a keresett szög 120°

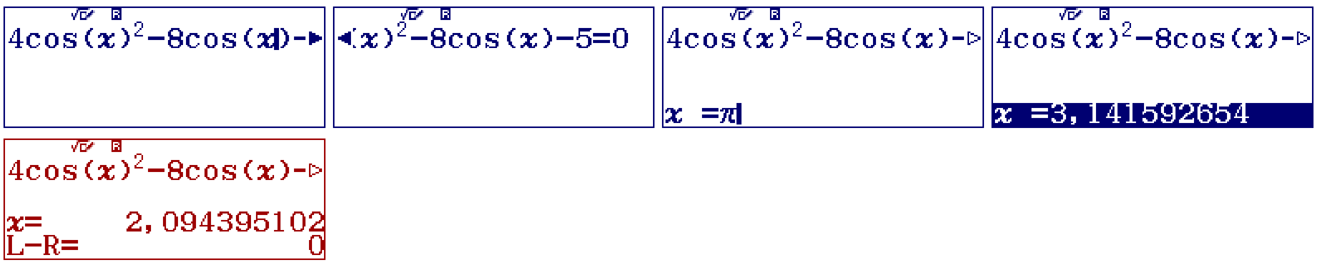
Második módszer

A szögegység legyen radián!

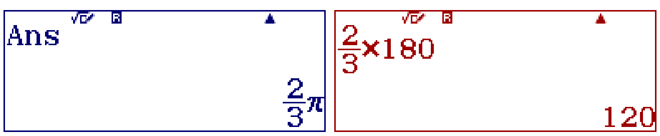
A különböző szög egységek közötti váltáshoz nyomjuk meg a SHIFT MENU gombokat.



Írjuk be az egyenletet. Közelítő megoldásként az $x = \pi$ (vagy csak 3) értékkel számolunk.

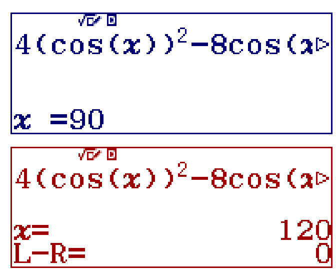


Tároljuk majd hívjuk elő az eredményt az AC illetve Ans gombok lenyomásával. Az = megnyomása után a megoldást tört alakban kapjuk meg.



➢ Miért álltunk meg, és nem keresünk további megoldásokat?

Megjegyzés: Legyen a szögegység fok. Az $x = 0°$ közelítésre a program 9 999 960 értéket ad. Próbálkozzunk egy másik értékkel. Tudjuk, hogy a megoldás 0°-nál nagyobb de 180°-nál kisebb, így az $x = 90° \left(\dfrac{0° + 180°}{2}\right)$ értéket használjuk.



▼ Keressük meg a következő egyenletek megoldást (feltételezzük, hogy $x \in \mathbf{R}$):

a. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

b. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3}$

c. $\sin 2x = 2\cos x$

d. $\sin 2x < \sin x$

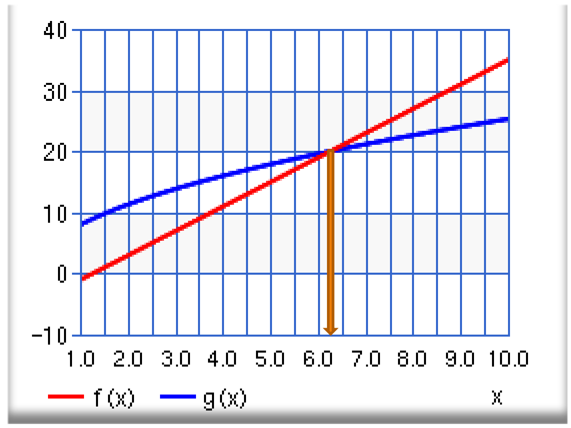
3 Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! $4x-5=8\sqrt{x}$

Előkészítés

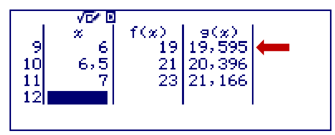
A két oldalhoz tartozó függvények megjelenítéséhez *Táblázat* módot használunk.

A két függvény $f(x)=4x-5$ és $g(x)=8\sqrt{x}$

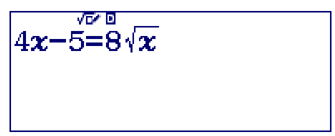
A megoldás 6 és 7 között van.



Megjegyzés:
A közelítés pontossága növelhető. Változtassuk meg a lépések mértékét 0,5-re!

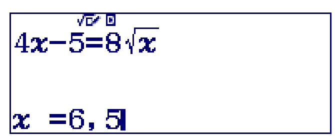


A megoldáshoz nyomjuk meg a SHIFT CALC = gombokat.

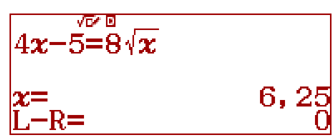


A program a feltételezett megoldáshoz közeli számra vár.

A közelítés érték legyen 6,5.



Egy megoldás $x=6,25$



A függvény grafikonja alapján megállapíthatjuk, hogy nincs más megoldás.

Megoldás: $x=6,25$

▼ Oldja meg a következő egyenleteket:

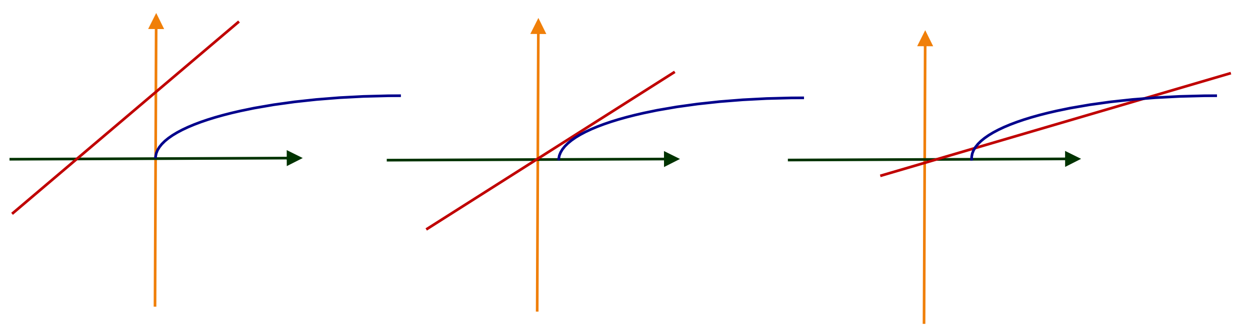
a. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=5$

b. $\sqrt{x+5}=x^2-5$

Vizsgáljuk meg a metszéspontok számát általában, az egyenes és a négyzetgyök továbbá az egyenes és a parabola függvények között.

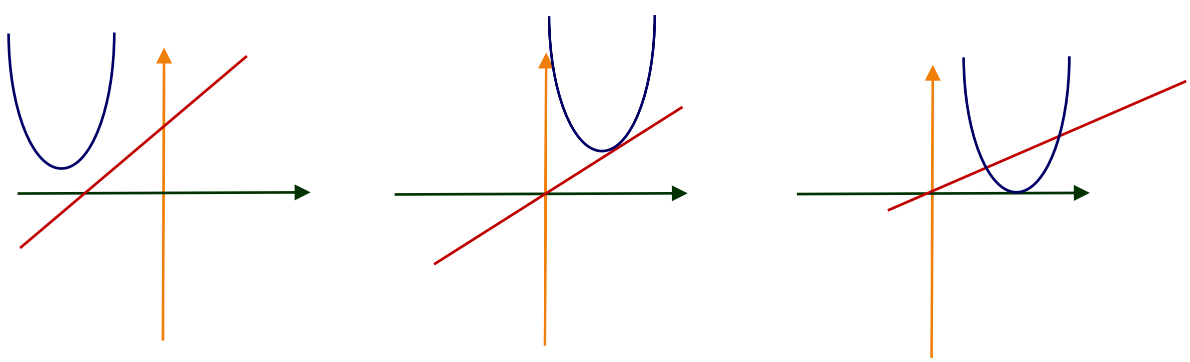
A metszéspontok száma négyzetgyök és egyenes függvények esetén

Nulla metszéspont   Egy metszéspont (két azonos)   Két metszéspont



A metszéspontok száma egyenes és parabola függvények esetén

Nulla metszéspont   Egy metszéspont (két azonos)   Két metszéspont

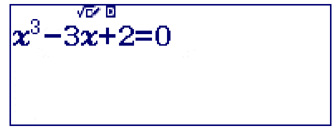


A metszéspontok száma mindkét esetben 0; 2. Ezek az információk sokat segíthetnek a megoldás megkeresésében. Például, ha tudjuk, hogy két megoldás van, akkor nincs értelme további megoldások után kutatni.

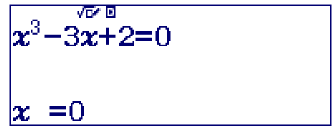
4 Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $x^3 - 3x + 2 = 0$

Első megoldás

Írjuk be az egyenletet úgy, ahogy az megjelenik:

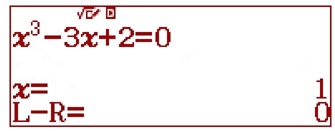


Nyomjuk meg a SHIFT és CALC (Solve) gombokat, majd az =-t.



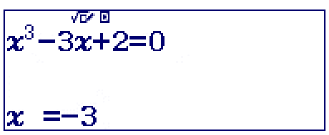
Tekintsük az $x = 0$ értéket! (alapérték)

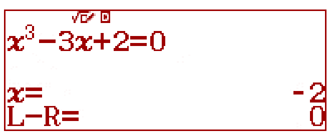
Nyomjunk =-t kétszer:



Az első megoldás $x = 1$. Adjunk egy másik 1-nél kisebb értéket (három megoldásra számítunk, melyek között egyenlők is lehetnek).

Próbáljuk meg az $x = -3$ értéket:





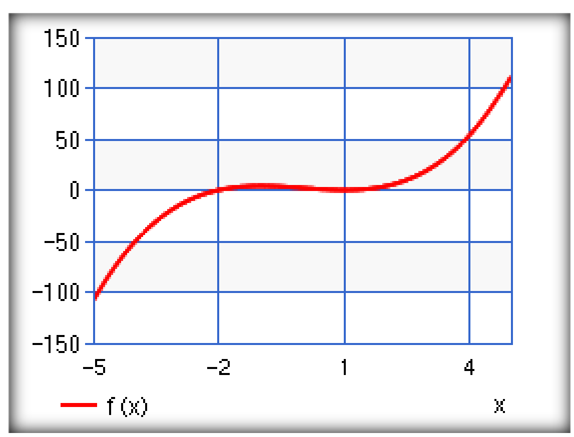
Tovább próbálgatva, azt találjuk, hogy nincs más megoldás.

Ugyanakkor, x a következő intervallumból választható: $]-\infty; -2[; [-2; 1[; [1; \infty[$.

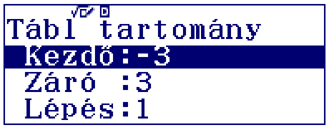
A QR kód és az egyenlet bal oldalához tartozó függvény:

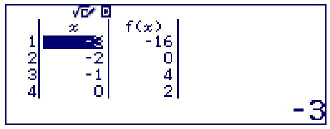
Megoldás:

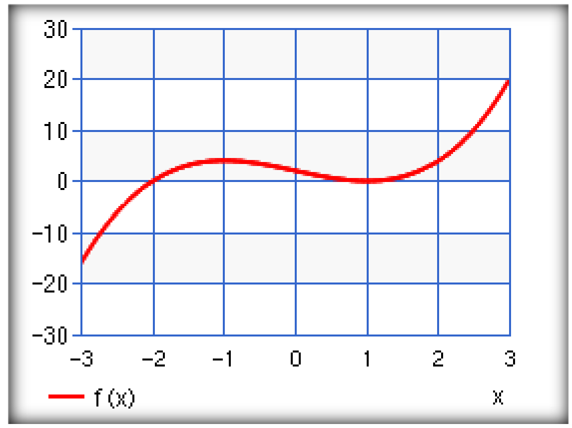
$x = 1$ vagy $x = -2$.



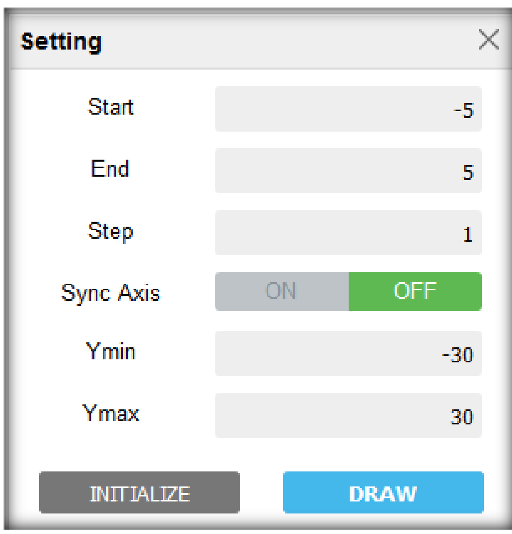
Megjegyzés: A fenti ábra nem elég tiszta ahhoz, hogy a gyököket megkülönböztessük. Változtassuk meg a határokat a $[-3;\ 3]$ intervallumra.

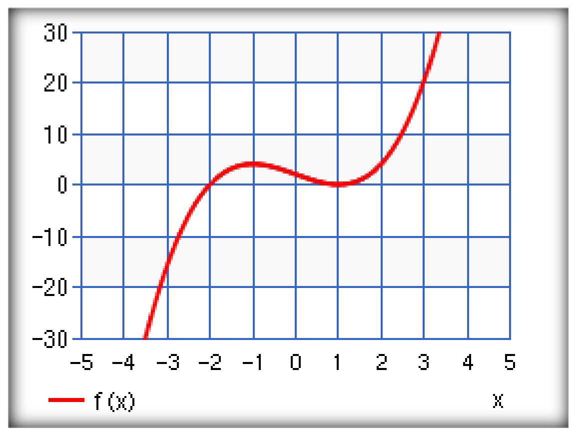






Pontosabb függvényképet kapunk, ha az y határait ($y_{\min}$ *és* $y_{\max}$) is megváltoztatjuk:

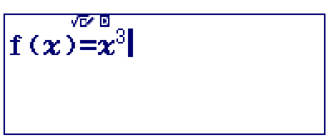


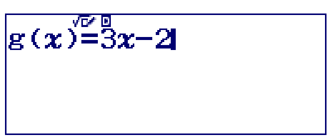


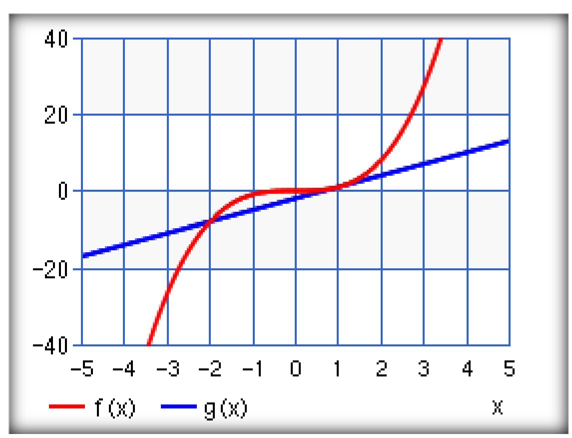
A következő függvények felrajzolásával is megoldható az egyenlet.

$f(x) = x^3$ és $g(x) = 3x - 2.$

Az y határai: $y_{\min} = -40$ és $y_{\max} = 40$

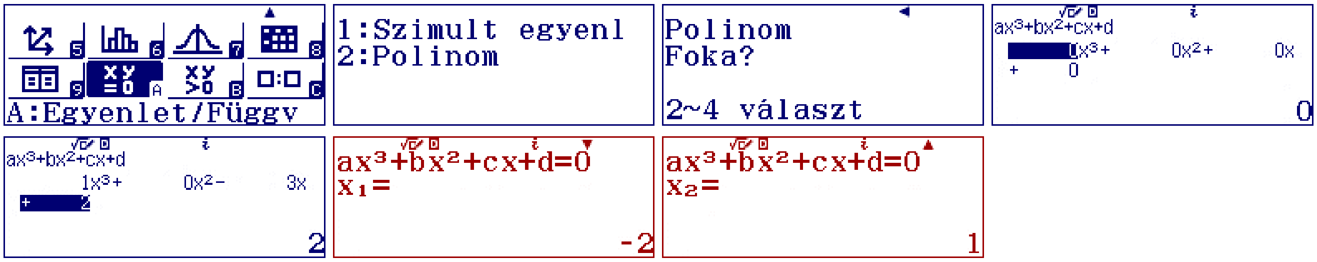




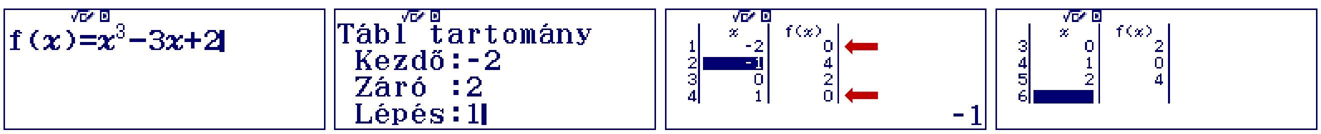


Második megoldás

Használjuk a beépített harmadfokú egyenletmegoldó funkciót:



Az érdeklődő diák könnyen észreveheti, hogy $x = 1$ megoldása az egyenletnek. Ebből kiindulva más racionális számokat is tesztelhet azzal, hogy megvizsgálja a 2 osztóit. A függvényértékeket kiszámolása helyett, készítsük el a megfelelő függvényértékekhez tartozó táblázatot:



A racionális megoldások $x = -2$ és $x = 1$.

5 $\lg(14-x)=2\lg(2x-4)-\lg(3x-11)$

Az egyenlet két oldalához tartozó függvényeket jelölje

$f(x)=\lg(14-x)$ és

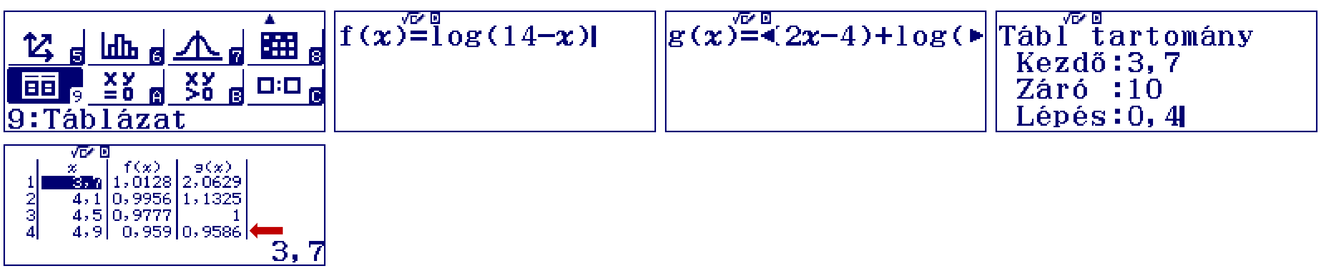
$g(x)=2\lg(2x-4)-\lg(3x-11)$.

Első megközelítés

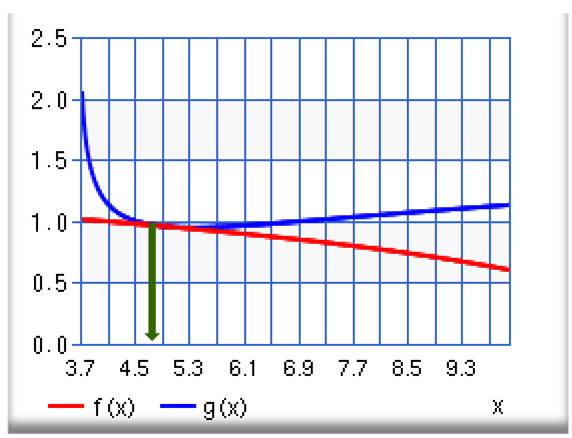
A feltételek:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-4>0 \text{ ha } x>2 \\ 3x-11>0 \text{ ha } x>\dfrac{11}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow x>\frac{11}{3}\approx 3{,}6 \text{ és } 14-x>0 \Rightarrow x<14$$

Végül is, az egyenlet értelmezési tartománya $\frac{11}{3}<x<14$.



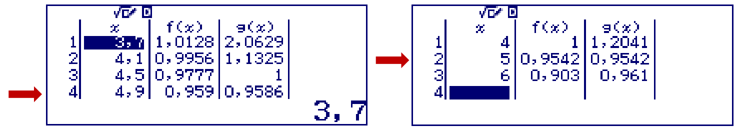
Látható, hogy $x=4{,}9$-nél a két függvényérték majdnem ugyanaz. Egy közelítő megoldás 4,9. Az $f(x)$ függvény grafikonja az 5-nél nagyobb értékekre szigorúan csökken, így az $x>5$ tartományban nem várható további megoldás.



A pontos megoldáshoz nézzük meg még egyszer a függvényérték táblázatot (a függvény grafikonja nem elég tiszta ahhoz, hogy megkülönböztethessük a megoldásokat).

Úgy tűnik, hogy 5 egy lehetséges megoldás.

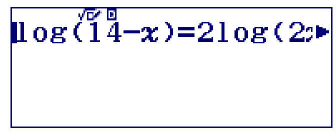
Megoldás: $x = 5.$



A megoldásokat mindig vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletbe. A továbbiakban ezt feltételezzük.

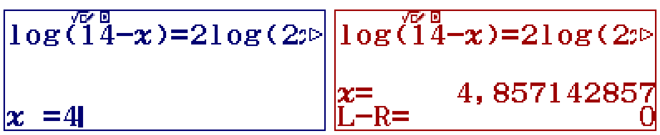
Második megközelítés

Írjuk be az egyenletet:



A megoldáshoz nyomjuk meg a SHIFT CALC (SOLVE) gombokat.

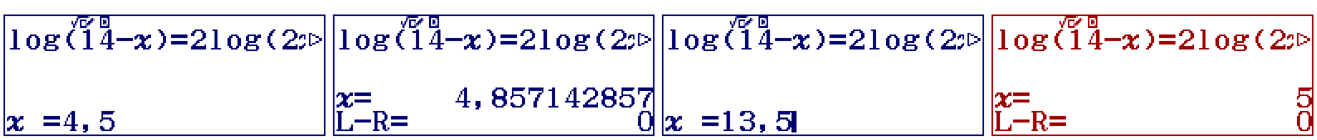
A kezdő érték 4 (a függvény értelmezési tartománya már ismert)



A megoldás közelítőleg 4,9.

Keressünk egy másik megoldást.

Nyomjuk meg az =-t még egyszer, és írjunk 4,5-t illetve 13,5-t egy lehetséges közelítésnek:



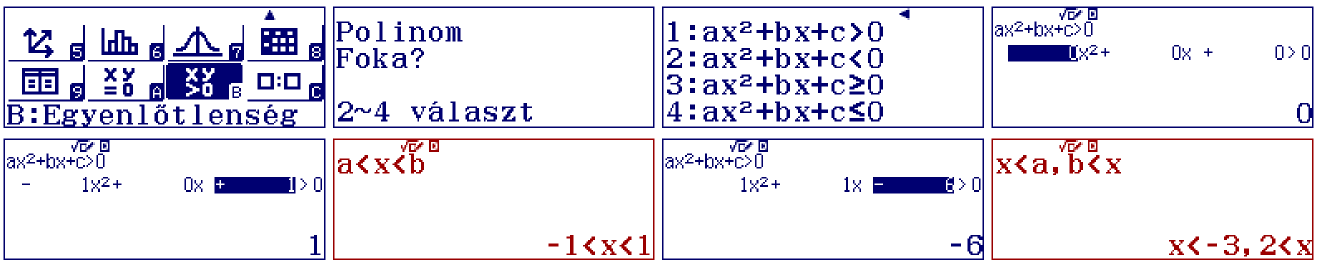
Megoldás: $x \approx 4{,}86$ és $x = 5.$

6 $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$

A feltételek $x^2+x-6>0$ és $1-x^2>0$.

Az egyenlőtlenségek megoldásához nyomjuk meg a MENU -t, és válaszuk az *Egyenlőtlenség* módot.

A következő lépések:



A probléma az, hogy a

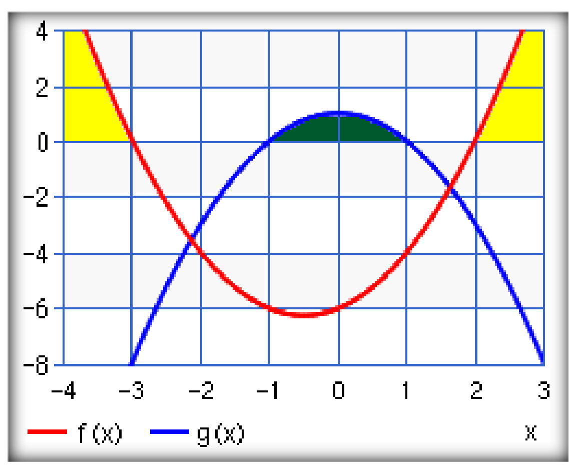
$-1<x<1$ és $x<-3$

vagy

$-1<x<1$ és $x>2$ feltételek ellentmondásban állnak egymással.

Ez azt jelenti, hogy az egyenlet ételmezési tartománya üres halmaz.

Nincs megoldás.

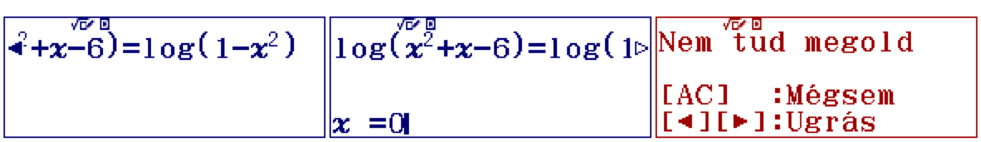


Megjegyzés A: Vegyük fel a két feltételt a koordináta-rendszerben.

Az $x^2+x-6>0$ és $1-x^2>0$ feltételek az x tengely feletti pontokat jelentik. Ezek a pontok lilával, illetve zölddel vannak jelölve.

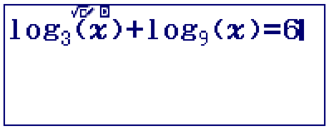
Megjegyzés B:

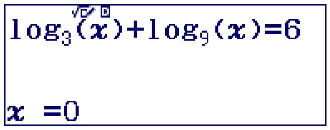
Írjuk be az egyenletet:

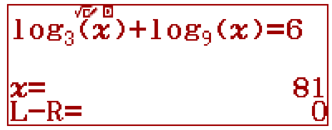


7 $\log_3 x + \log_9 x = 6$

Az egyenlet értelmezési tartománya $x > 0$







A további próbálkozás azt mutatja, hogy nincs más (különböző) megoldás.

Megoldás: $x = 81.$

Most változtassuk meg az egyenletet a következőre:

$$\log_3(2x-1) + \log_9 x = 6.$$

Tekintsük a következő függvényeket:

$f(x) = \log_3(2x-1)$ és

$g(x) = 6 - \log_9 x$

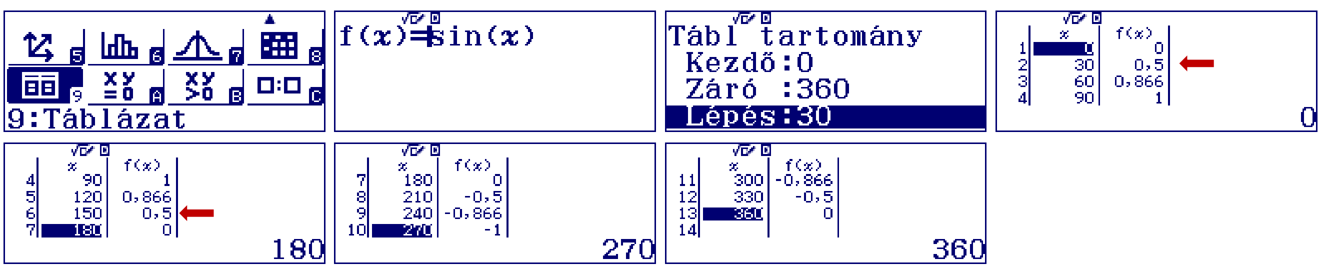
Mindkét esetben a logaritmus után egy lineáris függvény szerepel. Mennyi lehet a maximális metszéspontok száma a két függvény esetében? Hogyan kapcsolódik ez az eredeti feladathoz?

Komplex trigonometrikus egyenletek megoldása számológéppel nem egyszerű. Ha a feltételek megengedik, akkor végtelen sok megoldás van. Ezek nem mindegyike független egymástól, a megoldások a periodussal kapcsolódnak egymáshoz. Ebben a fejezetben két dolgot fogunk bemutatni: az első, a független megoldások megkeresésének módja, a második pedig, a megfelelő periodus megtalálása az egyes megoldásokhoz. A számológép rögtön megad egy megoldást. Ha $\sin x = a$ akkor $x = \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi$. Bizonyos megoldásokat jobban részletezünk. A cél az, hogy megtaláljuk a megfelelő tartományt a második (különböző) megoldáshoz. Ezért olyan fontos a szimmetria tulajdonság és a periodicitás. A 8. és 9. problémák megoldása hasonló, megoldásukkal a megfelelő közelítést próbáltam bemutatni. A 10. probléma a 11, 12 és 13. probléma alapja. Hiszünk abban, hogy a számológép segítségével a tanár sokkal hatékonyabban tudja tanítani a trigonometrikus függvényeket és egyenleteket. Ebben szekcióban a *k*, *l* számok mindig egészek.

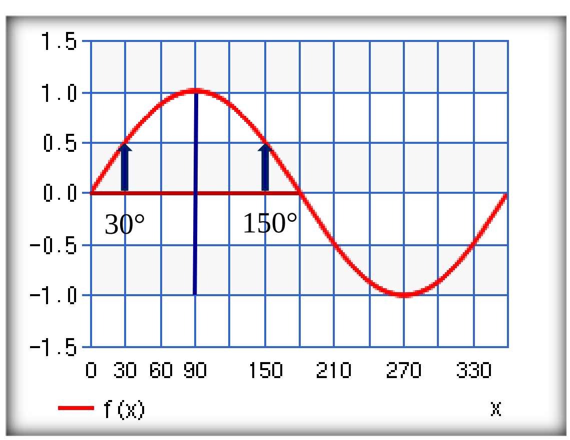
Tekintsünk két egyszerű egyenletet.

8 Oldja meg az $\sin x = 0{,}5$ egyenletet, ahol $0° \le x \le 360°$ illetve $0 \le x \le 2\pi$

A. Az *x* mértékegysége fok (D)



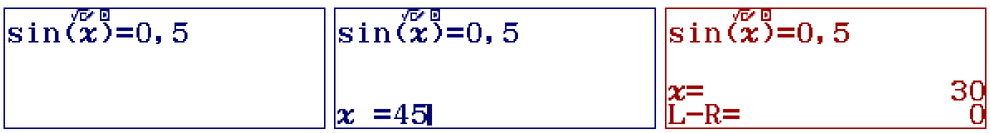
Az első szög, melynek szinusza 0,5 30°. Ezt támasztja alá a függvény grafikonja is.



A 30° és 150° közötti tartományban a függvény szimmetrikus. Egy megoldás megtalálásához használjuk a számológépet. Bármi is a megoldás, a másik megoldás ebből az $x = 90°$-ra való tükrözéssel kapható meg. Úgy tűnik, hogy a két (különböző) megoldás 30° és 150°.

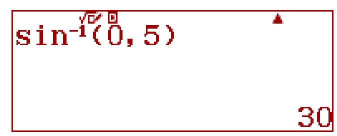
Az egyenletet azonban más módon is megoldható.

Tegyük fel, hogy a függvény grafikonja nem ismert. Írjuk be az egyenletet úgy, ahogy az megjelenik. A szinusz az első és a második síknegyedben pozitív. A feltételezett megoldás az $0° \le x \le 90°$ vagy $90° < x \le 180°$ intervallumokban lehet. $x = 45°$-t választottuk.

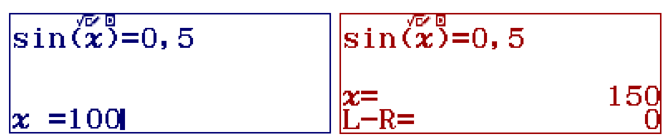


A megoldás 30°. Bármilyen más számot tesztelhetünk a 0° és 90° intervallumban, a megoldás mindig 30°.

Megjegyzés: az első megoldás megkapható a szinusz függvény inverzének kiszámításával is:



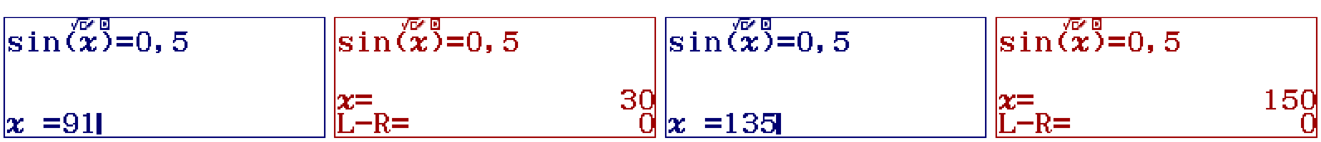
A második megoldáshoz megtalálásához válasszuk ki a megfelelő értéket a megfelelő síknegyedből. Például, ha az első megoldás 30°, akkor a második:



Ebben az esetben a választott szám a 100°.

Megoldás: $x = 30°$ és $x = 150°$.

Megjegyzés: bizonyos esetben nem kapható meg az $x = 150°$ mint második megoldás, még akkor sem, ha a választott szám 90° és 180° között van. Legyen a választott szám 135. Ezzel megkaptuk a 150°-ot. Mi a probléma az $x = 91°$-kal? (Lásd: az egyenlethez tartozó függvény grafikonja)

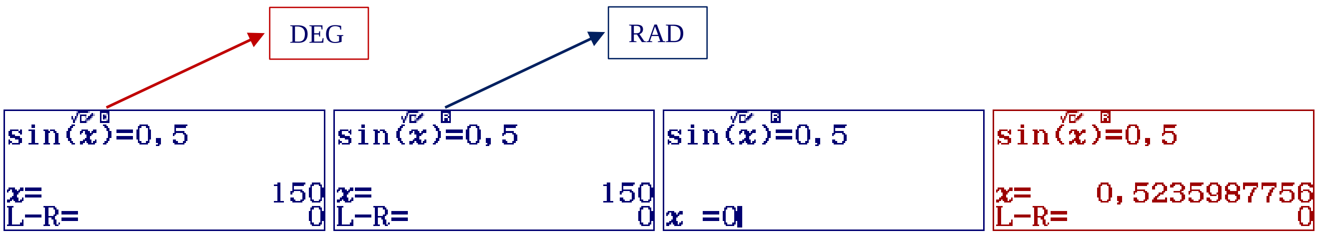


B. Az *x* mértékegysége radián (R)

Változtassuk a módot radiánra. Ezt akár a számolás közben is megtehetjük. A mód váltás után a közelítéshez adjunk egy értéket. A két intervallum $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ és $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

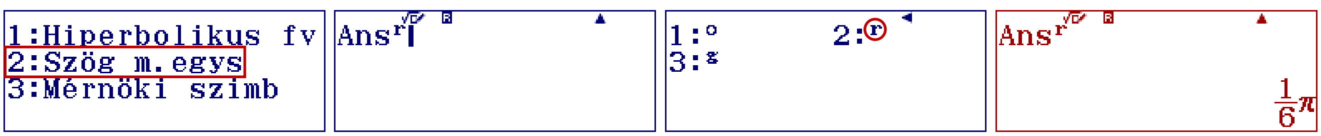
Az megnyomása után változtassuk meg a korábbi értéket (150°), az újra (0°).

0° választottuk:



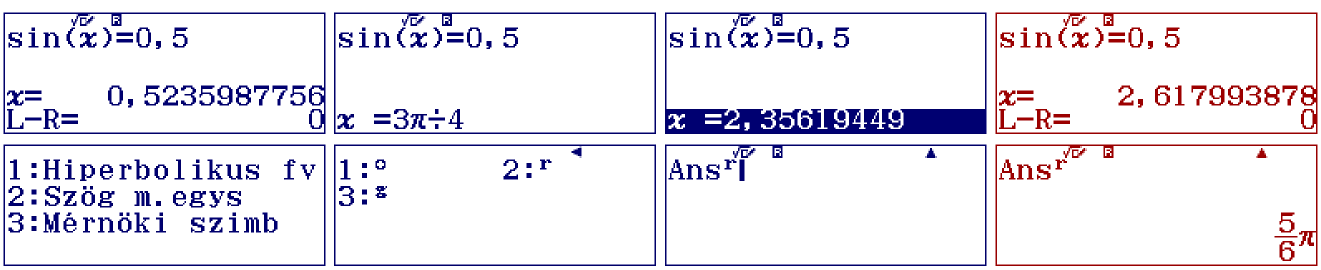
A megoldás $\approx 0{,}52$.

Könnyen megkapható a pontos megoldás $\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ az OPTN gomb megnyomásával, majd válasszuk a Szög mértékegységet radiánnak.



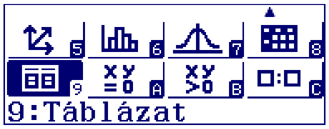
Második megoldás:

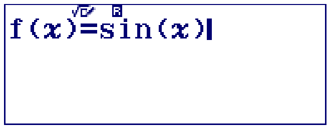
A választott szám $\frac{3}{4}\pi$ $\left(=\frac{\frac{\pi}{2}+\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi\right)$

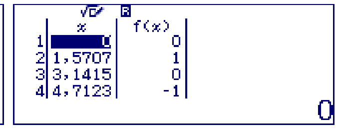


Megoldás: $x=\frac{1}{6}\pi$ és $x=\frac{5}{6}\pi$.

9 Oldjuk meg a következő egyenletet $\sin x = -0{,}5$ ahol $x \in \mathbf{R}$

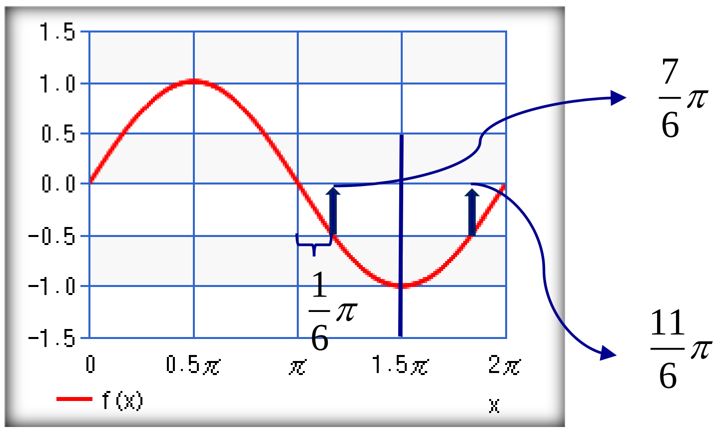




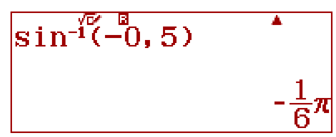


A π és 2π között a függvény szimmetrikus. A szimmetria tengely $x = \frac{3\pi}{2} \left(= \frac{\pi + 2\pi}{2} \right)$.

Találjunk egy megoldást.



Használhatjuk a szinusz inverzét vagy az egyenletmegoldó funkciót. Az egyenletmegoldóhoz egy közelítés szükséges. A két választott szám a $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ és $\left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ intervallumban van.



Első megközelítés.

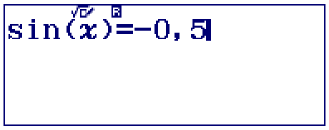
A kapott szám $-\frac{1}{6}\pi$ vagy $-\frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ (pozitív érték szükséges, ugyanakkor a szinusz függvény periodikus függvény).

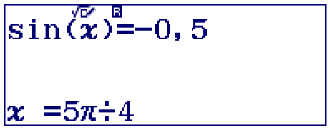
A szimmetria miatt a másik (különböző) megoldás $\pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$

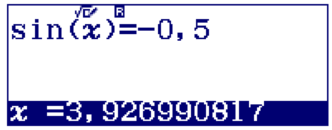
Megoldás: $x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ vagy $x = \frac{11}{6}\pi + l \cdot 2\pi$

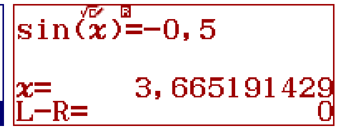
Második megközelítés.

A közelítéshez választott szám $\frac{5\pi}{4}$ $\left(= \frac{\pi + \frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{5\pi}{4} \right)$

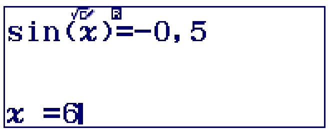


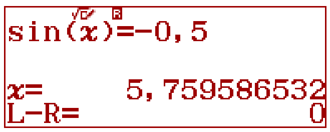






Megjegyzés: bármilyen szám használható a $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2} \right]$ $\left(\approx [3{,}14;\ 4{,}71] \right)$ intervallumból.

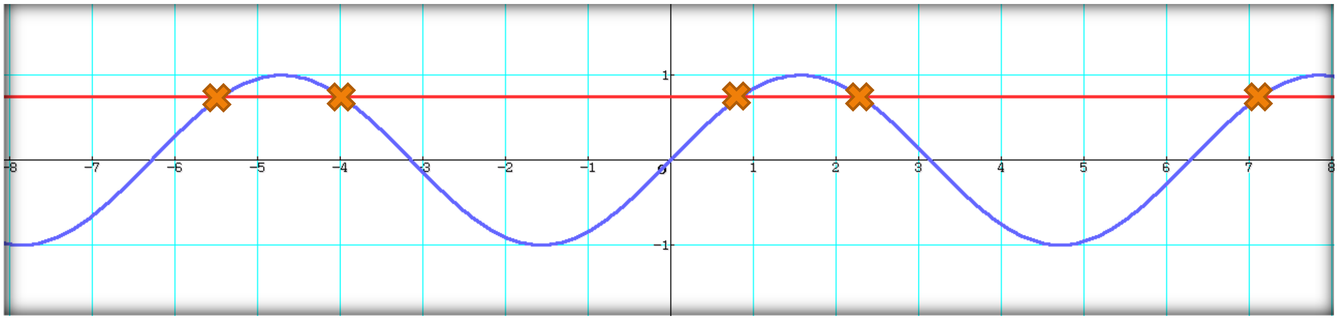




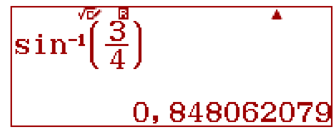
(A választott szám a második közelítéshez 6)

$x \approx 3{,}6652 + k \cdot 2\pi$ és $x \approx 5{,}7596 + l \cdot 2\pi$

10 Vizsgáljuk meg a $\sin x = \dfrac{3}{4}$ egyenlet megoldásait, ahol x mértékegysége radián.

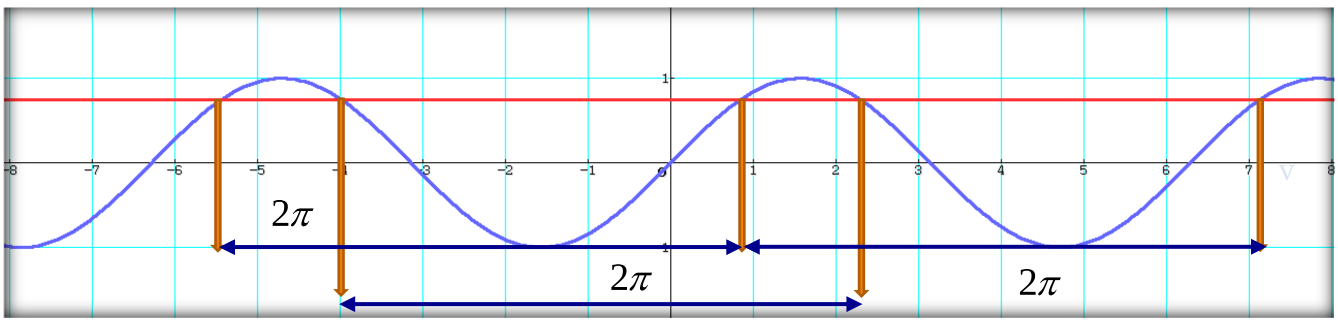


Ahogy az látható, végtelen sok megoldás van.

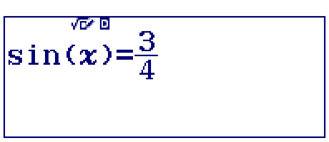


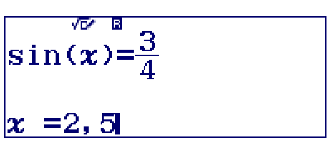
…-5,4; -4; 0,8; 2,3; 7,1….

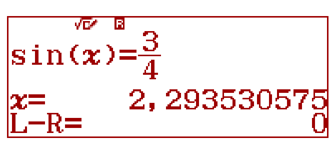
Bizonyos megoldások függetlenek egymástól, mások nem. Például, -5,4; 0,8; 7,1 mindegyike kapcsolódik egymáshoz: a közöttük lévő távolság 2π (lásd a grafikont).



Ez azt jelenti, hogyha ismerünk egy megoldást, akkor a másik 2π távolsággal odébb van. Mindig két különböző megoldás van (szinusz, koszinusz), a több ettől 2π távolsággal különbözik. A probléma az, hogy hogyan döntsük el, hogy melyek különbözőek? (Különböző azt jelenti, hogy egy megoldás a másikból nem kapható meg a periódus hozzáadásával / kivonásával). A függvény grafikonja alapján, a 0° és 180° vagy 0 és π $(\approx 3{,}14)$ között két (különböző) megoldás van (a szinusz értéke itt pozitív). Tehát, a 0,8480 és a 2,2935 biztosan két (különböző) megoldás.







Megoldás: $x \approx 0{,}8481 + k \cdot 2\pi$ és $x \approx 2{,}2935 + l \cdot 2\pi$

Foglaljuk össze az eddig alkalmazott eljárást:

A) $\sin x = a$ ahol $0 < a < 1$, x egysége fok.	$\sin x = 0{,}1979$
	`sin⁻¹(0,1979)`
	`11,41418354`

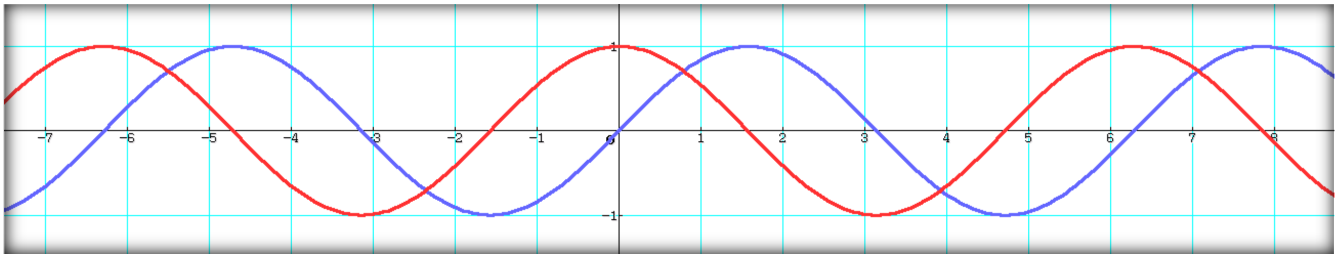
Első megoldás:
$x = \sin^{-1}(a) + k \cdot 360°$.
	$x \approx 11{,}41° + k \cdot 360°$
	`180−Ans`
	`168,5858165`

Második megoldás: $x = 180° - \sin^{-1}(a) + l \cdot 360°$	$x \approx 168{,}58° + l \cdot 360°$
VAGY	VAGY

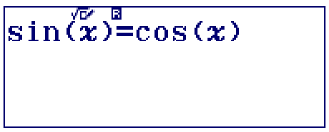
Írjuk be az egyenletet majd használjuk az SHIFT CALC (Solve) gombokat és adjunk egy megközelítést a lehetséges megoldásra. Egy megoldás mindig 0° és 90° (mindkettőt beleértjük) között van, a másik pedig 90° és 180° között. Tehát a közelítés lehet például 0° és 180°.	`sin(x)=0,1979`
	`x =0`
	`sin(x)=0,1979`
	`x= 11,41418354`
	`L−R= 0`
	Második megoldás:
	`sin(x)=0,1979`
	`x =180`
	`sin(x)=0,1979`
	`x= 168,5858165`
	`L−R= 0`

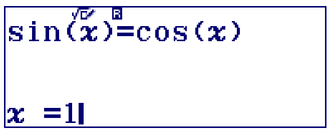
Hasonló az eljárás akkor, ha a negatív. Ugyanakkor, ha az x mértékegysége radián, akkor 0 és π lehet egy-egy lehetséges közelítés.

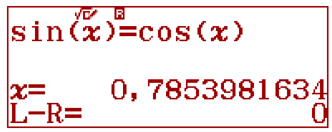
11 $\sin x = \cos x$

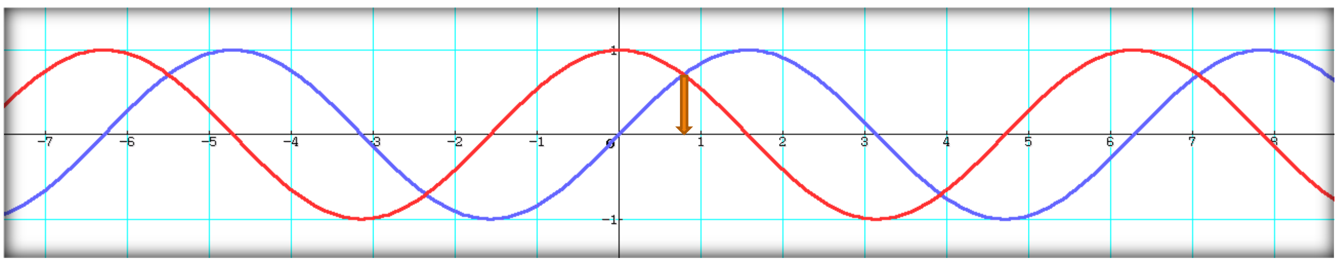


A szinusz, koszinusz függvény periodikus. A periódus 2π. Írjuk be az egyenletet és változtassuk át a szögegységet radiánra. A közelítés legyen 1.



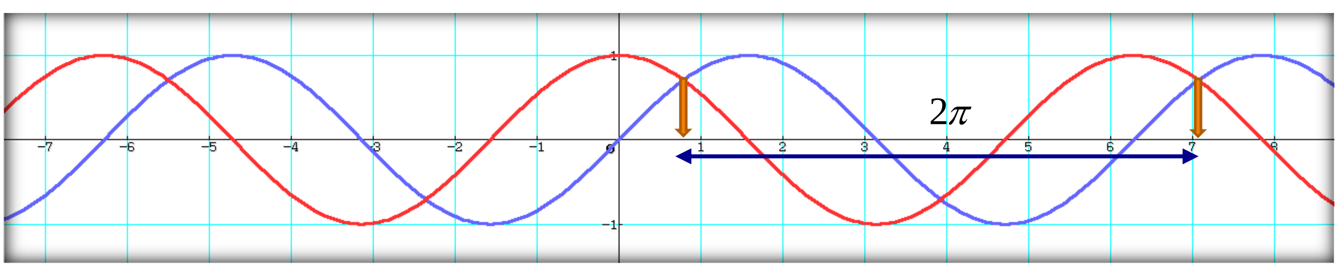




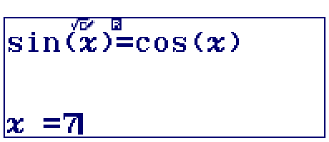


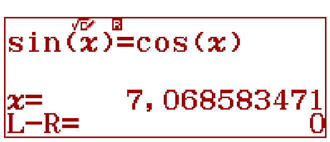
Egy megoldás $\approx 0{,}8$, lásd a fenti függvényt.

A két oldalnak (sin, cos) ugyanaz a periódusa. Ez azt jelenti, hogy a metszéspontok ismétlődnek 2π-vel később.



Ez könnyen ellenőrizhető az $x = 7$ közelítéssel.





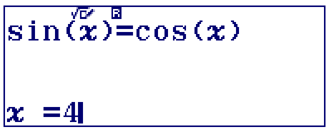
A megoldások 0,7854 és 7,0686 (közel a 7-hez) a különbség 6,2832 $\left(2\pi \approx 6,2832\right)$.

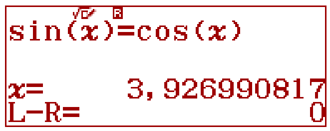
Megoldás: $x \approx 0,7854 + k \cdot 2\pi$

Vizsgáljuk meg a kettő közötti megoldásokat. Válasszunk egy számot a közelítéshez.

$x \in \left]0,7854;\ 7,0686\right[$.

Legyen ez a szám 4.



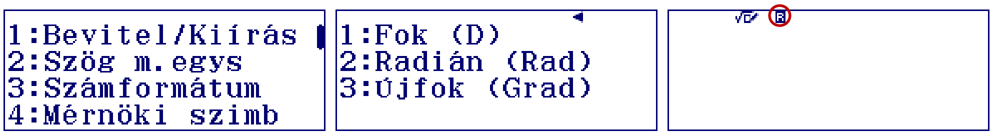


Megoldás: $x \approx 3,927 + l \cdot 2\pi$

12 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

Előkészítés.

Változtassuk meg a szögegységet fokról radiánra.



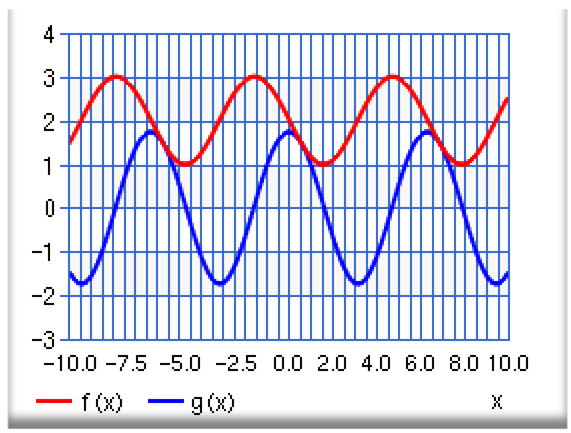
Tekintsük az egyenlet két oldalát, mint két függvényt.

Legyen $f(x) = 2 - \sin x$ és $g(x) = \sqrt{3}\cos x$

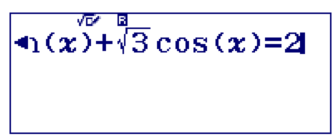
A **Kezdő**, a **Záró** és a **Lépés** értékek legyenek rendre -10, 10, 0,5,

A QR kód és a grafikon:

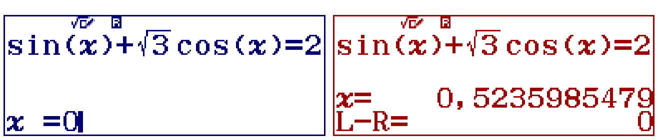
Jól látszik, hogy a két függvény érinti egymást egy pontban. Egy megoldás várható. (A másik megkapható ebből 2π hozzáadásával.)



Írjuk be az egyenletet úgy, ahogy az megjelenik:

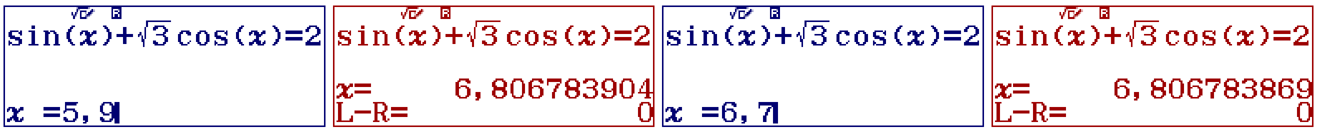


A megoldáshoz nyomjuk meg a SHIFT CALC (SOLVE) gombokat. A kezdő értékeket (0) ne változtassuk meg.



További (különböző) megoldásokat is kereshetünk. A második (lehetséges) megoldás bárhol lehet a $2\pi - 0,52359$ és $2\pi + 0,52359$ vagy $5,7595 < x < 6,8067$ (közelítőleg) intervallumban.

Írjuk be a két szélső értéket mint közelítést (5,9 és 6,7):



A két esetben kapott megoldás ugyanaz, mint a korábban kapott megoldások (az egyetlen különbség a periódus, 2π)

Megoldás: $x \approx 0,5236 + k \cdot 2\pi$

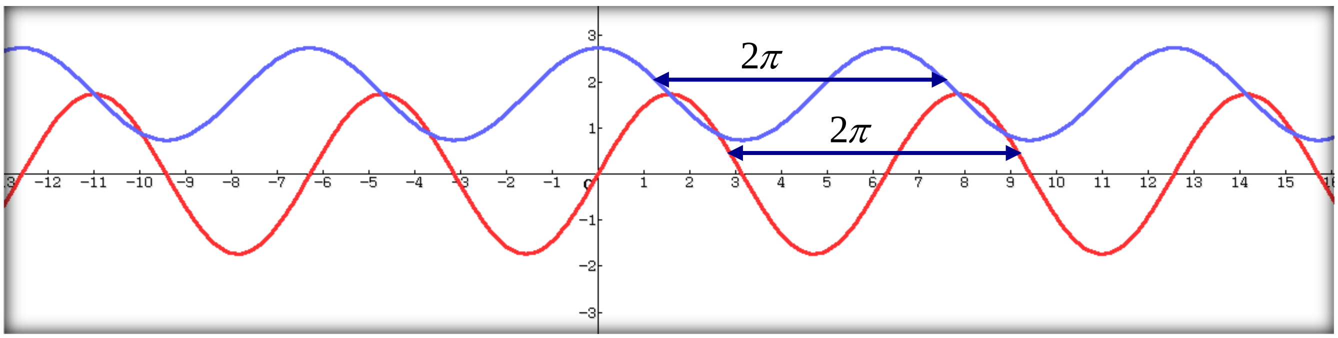
13 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3}$

Tekintsük a következő függvényeket:

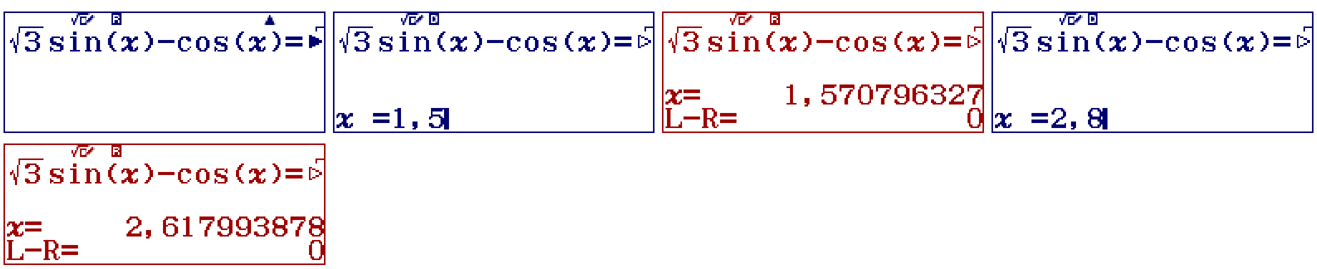
$f(x) = \sqrt{3}\sin x$ és $g(x) = \sqrt{3} + \cos x$

Az egyes függvények periódusa: $p_f = 2\pi$ és $p_g = 2\pi$.

A függvénygrafikonok alapján könnyű megadni a megfelelő közelítést. A két különböző megoldás 0 és 3 között van. Ha van megoldás, a másik ettől 2π távolsággal később van.

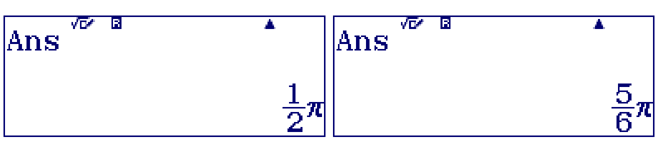


A kezdő értékek 1,5 és 2,8.



Megoldás: $x \approx 1{,}5708 + k \cdot 2\pi$ és $x \approx 2{,}618 + l \cdot 2\pi$

Megjegyzés: A pontos értékhez nyomjuk meg az AC és Ans gombokat.

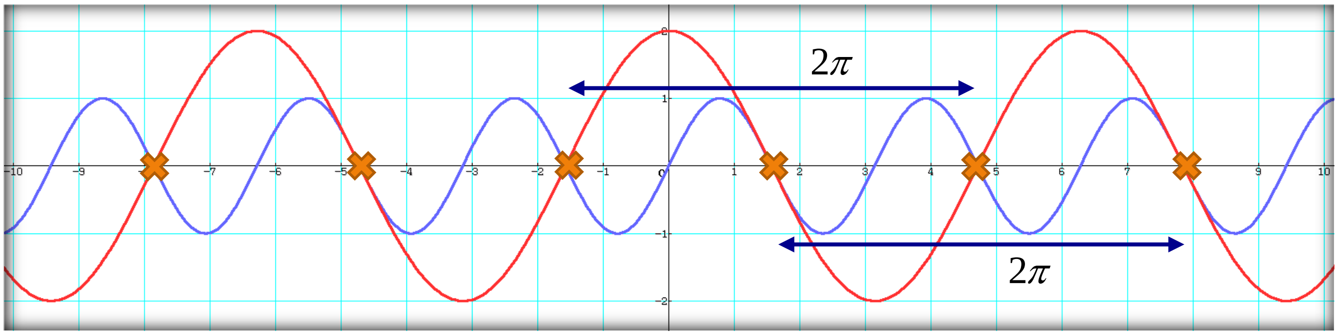


Megoldás: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ és $x = \frac{5}{6}\pi + l \cdot 2\pi$

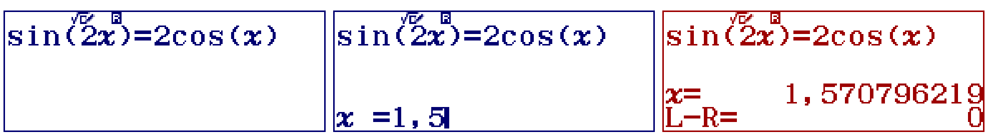
14 $\sin 2x = 2\cos x$

Határozzuk meg az egyes oldalak periódusát.

A bal és jobb oldal periódusa $\pi \left(=\frac{2\pi}{2}\right)$ és 2π.

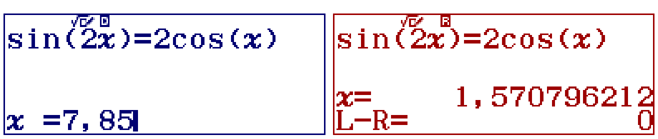


Találjunk egy megoldást a függvény fenti grafikonja alapján! A választott szám az 1,5 (a két függvény ebben a pontban metszi egymást közelítőleg). A periódusok legkisebb közös többszöröse 2π.

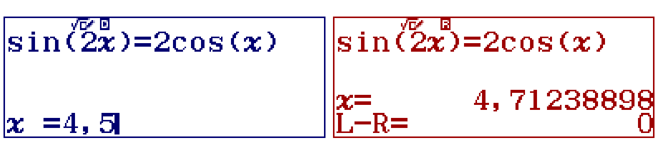


Ha 2π-t adunk az $x \approx 1{,}57$ megoldáshoz, akkor nem kapunk különböző megoldást.

Ellenőrizzük ezt! Az 1,57+6,28 összege 7,85. Így 7,8-cal mint közelítéssel próbálkozva a megoldás $\approx 1{,}57$:



A másik (különböző) megoldás 4 és 5 között van. Legyen a közelítés 4,5:

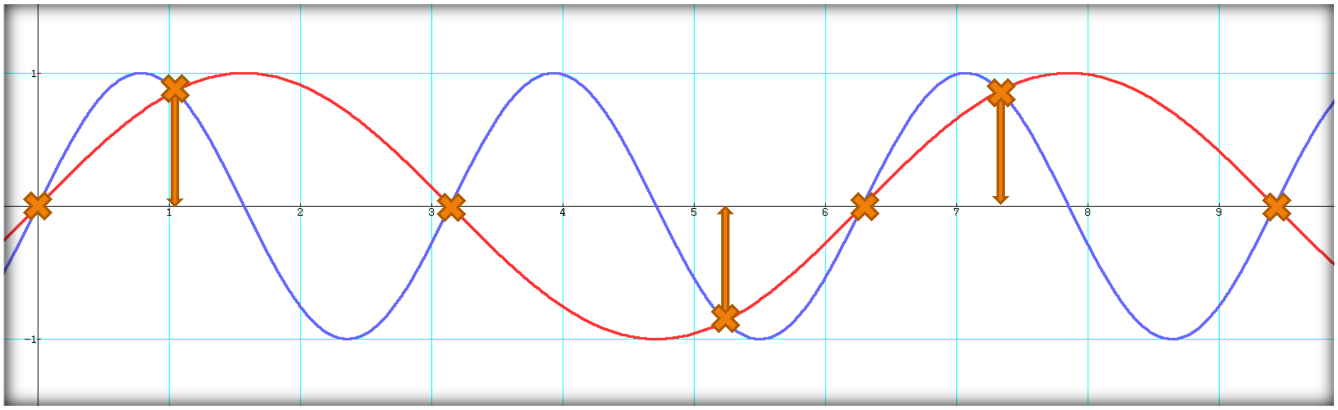


Megoldás: $x \approx 1{,}5708 + 2\pi \cdot k$ és $x \approx 4{,}7124 + 2\pi \cdot l$

15

$\sin 2x < \sin x$

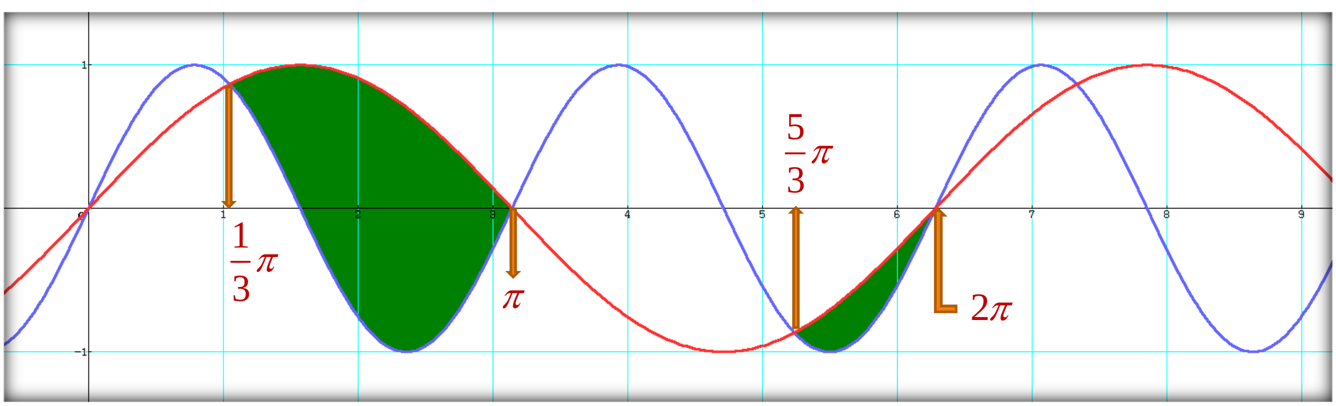
A két függvény: $f(x) = \sin 2x$ és $g(x) = \sin x$. $p_f = \frac{2\pi}{2} = \pi$ és $p_g = 2\pi$.



$\sin 2x = \sin x$

sin(2x)=sin(x) x =1	sin(2x)=sin(x) x= 1,047197551 L−R= 0	sin(2x)=sin(x) x =3	sin(2x)=sin(x) x= 3,141592654 L−R= 0
sin(2x)=sin(x) x =5	sin(2x)=sin(x) x= 5,235987756 L−R= 0	sin(2x)=sin(x) x =6	sin(2x)=sin(x) x= 6,283185307 L−R= 0

Megoldás: $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$, $x = \pi + l \cdot 2\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi + m \cdot 2\pi$ és $x = 2\pi + n \cdot 2\pi$



Megoldás: $x \in \left]\frac{1}{3}\pi + n \cdot 2\pi;\ \pi + n \cdot 2\pi\right[$ és $x \in \left]\frac{5}{3}\pi + m \cdot 2\pi;\ 2\pi + m \cdot 2\pi\right[$ $(n, m \in \mathbf{Z})$

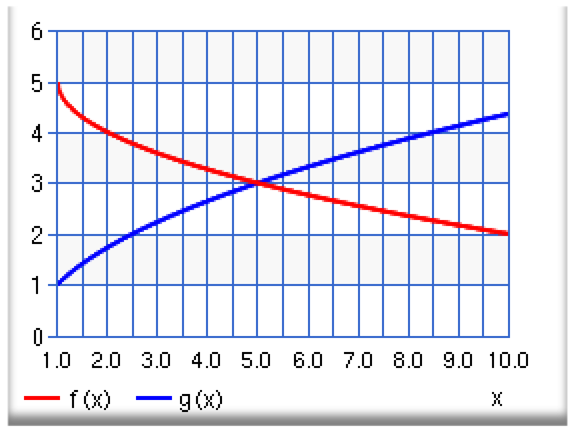
16 $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=5$

A bal oldal értelmezési tartománya $x \geq 1$. Ahogy azt korábban is tettük, felrajzoljuk a függvények képeit. Ahelyett, hogy a bal oldalt tekintenénk egy függvénynek, a következő két függvényt vizsgáljuk:

$f(x)=5-\sqrt{x-1}$ és $g(x)=\sqrt{2x-1}$

A függvények grafikonjai jól mutatják, hogy $x=5$ a megoldás.

Azt is láthatjuk, hogy a kék függvény növekszik, és magasabban helyezkedik el, mint a piros, ha $x>5$.



Ha a függvényértékek táblázatát lefelé görgetjük, jól láthatjuk ezt a tendenciát. A piros függvény csökken.

Megoldás: $x=5$.

Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy a kék függvényértékek nagyobbak 3-nál, ha $x>5$. Ugyanakkor ebben a tartományban a pirossal jelölt függvény 3 alatt van.

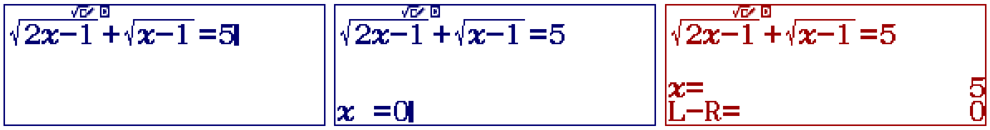
$$\sqrt{2x-1}>3 \Rightarrow 2x-1>9 \Rightarrow x>5 \text{ és } 5-\sqrt{x-1}<3 \Rightarrow 2<\sqrt{x-1} \Rightarrow 5<x$$

Ezért,

$$\begin{cases} f(x)=5-\sqrt{x-1}<3 \text{ ha } x>5 \\ g(x)=\sqrt{2x-1}>3 \text{ ha } x>5. \end{cases}$$

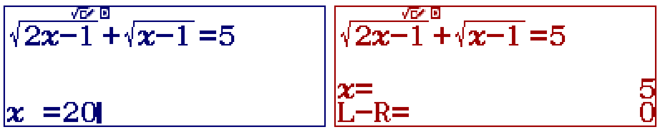
➢ Bizonyítsuk be, hogy a piros függvény mindig a kék felett van, ha $x<5$.

Második megoldás:



Adjunk meg egy, a feltételezett megoldáshoz közeli értéket.

Legyen $x=20$ („távol” az $x=5$ értéktől)



A megoldás nem változott.

➢ Honnan tudjuk, hogy az $x=20$ (vagy bármely 5-nél nagyobb vagy kisebb szám) elég biztosíték arra, hogy a két függvény már nem metszi egymást többször?

17 $\sqrt{x+5} = x^2 - 5$

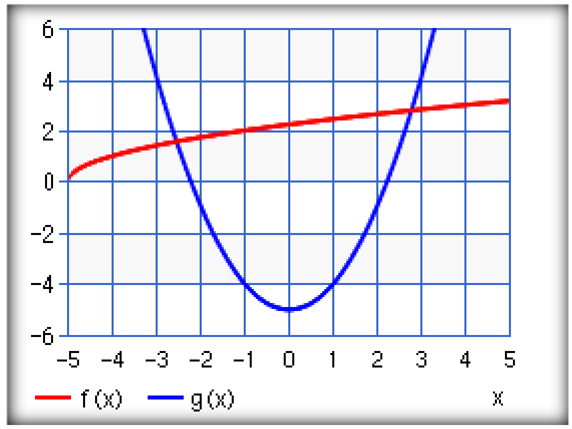
Az értelmezési tartomány meghatározása helyett, rajzoljuk fel a megfelelő függvényeket. A négyzetgyök függvény miatt csak az $x \geq -5$ esettel foglalkozunk.

A kezdő érték -5.

Legyen $f(x) = \sqrt{x+5}$ és $g(x) = x^2 - 5$

Az y határai $y_{\min} = -5$ és $y_{\max} = 5$

```
Tábl tartomány
 Kezdő:-5
 Záró :5
 Lépés:1
```



Írjuk be az egyenletet úgy, ahogy az megjelenik

```
√x+5 =x²−5
```

```
√x+5 =x²−5

x  =0
```

```
√x+5 =x²−5

x=      -2,561552813
L−R=               0
```

Az első közelítés az alapérték majd a grafikon alapján $x = 3$:

```
√x+5 =x²−5

x  =3
```

```
√x+5 =x²−5

x=       2,791287847
L−R=               0
```

A megoldások $x \approx -2{,}6$ és $x \approx 2{,}8$. Nincs több megoldás.

Megjegyzés: az egyenletet négyzetre emelve: $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$.

```
A:Egyenlet/Függv
```

```
1:Szimult egyenl
2:Polinom
```

```
Polinom
Foka?

2~4 választ
```

```
ax⁴+bx³+cx²+dx+e
  0x⁴+     0x³+     0x²
+  0x +     0
                       0
```

```
ax⁴+bx³+cx²+dx+e
  1x⁴+     0x³−    10x²
−  1x +    20
                      20
```

```
ax⁴+bx³+···+e=0
x₁=

         2,791287847
```

```
ax⁴+bx³+···+e=0
x₂=

         1,561552813
```

```
ax⁴+bx³+···+e=0
x₃=

        -1,791287847
```

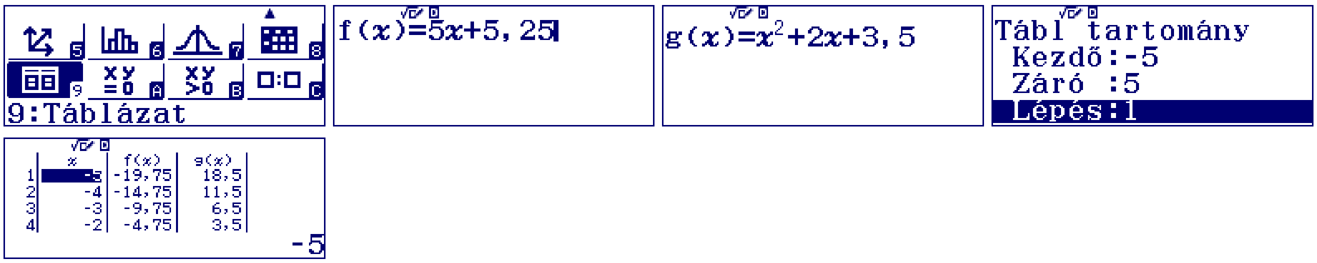
```
ax⁴+bx³+···+e=0
x₄=

        -2,561552813
```

Mi a probléma ezekkel?

18 $5x+5{,}25>x^2+2x+3{,}5$

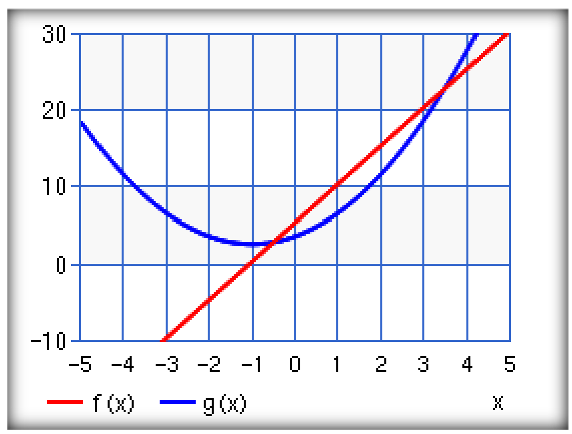
Tekintsük a két oldalon álló első és másodfokú kifejezést egy-egy függvénynek. Használjuk a táblázat módot, majd a QR kód segítségével adjuk meg a két függvény képét!

$f(x)=5x+5{,}25$ és $g(x)=x^2+2x+3{,}5$



A függvények grafikonja alapján látjuk, hogy az egyenes körülbelül a $-0{,}5$ és $3{,}5$ közötti tartományon a parabola felett helyezkedik el. Az y határai $y_{\min}=-5$ és $y_{\max}=5$

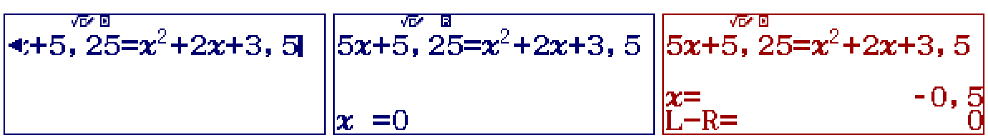
Keressük meg a két függvény metszéspontját!



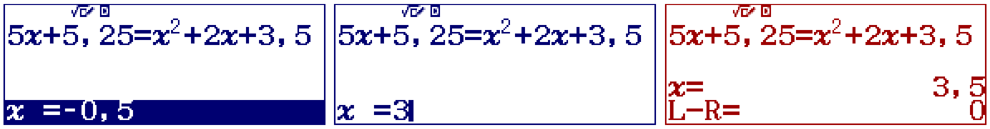
Ehhez oldjuk meg az $5x+5{,}25=x^2+2x+3{,}5$ egyenletet!

A megoldáshoz nyomjuk meg a SHIFT CALC gombokat, majd az = -t.

Az alapértéket $(x=0)$ ne változtassuk meg:



Az $x=-0{,}5$ megfelel a korábbi feltételezésnek. A második megoldáshoz adjunk meg egy, a második (feltételezett) megoldáshoz közeli értéket. A grafikon alapján az $x=3$ értékkel próbálkozunk. Ehhez nyomjunk újból egyenlőséget, majd írjunk 3-at a $-0{,}5$ helyett és nyomjunk = -t:

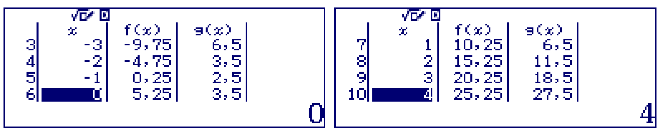


A két megoldás: $x_1 = -0{,}5$ és $x = 3{,}5$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $-0{,}5 < x < 3{,}5$.

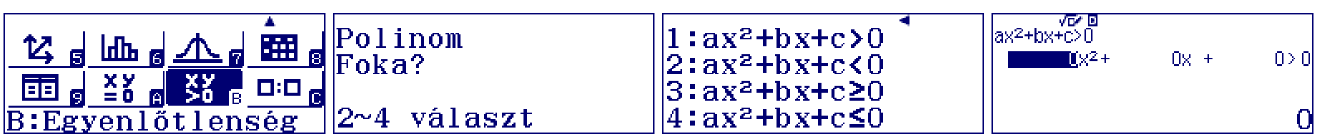
Megjegyzés:

A) A függvényértékek táblázata alapján látható, hogy az $f(x)$ függvény grafikonja mikor vesz fel nagyobb értéket, mint a $g(x)$ függvény. Ehhez görgessük lefelé a táblázatot a $\boxed{+}$ gomb megnyomásával. A számológép automatikusan növeli a tartományt, annak ellenére, hogy az a $[-5;\ 5]$ intervallum volt.



B) A táblázatot a $[-5;\ 5]$ intervallumban készítettük el. Ez a választás szabad volt, hiszen az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A táblázatban szereplő *Lépés* 1 volt, érdemes ezt 0,5-re változtatni, ezzel ugyanis jobban látszik, ha a megoldás nem egész. Ahol érdemes, a továbbiakban ezt a léptéket alkalmazzuk.

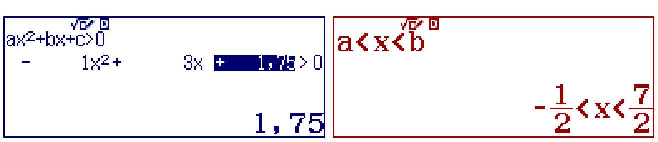
C) Az egyenlőtlenség fenti megoldása a függvényértékek és a grafikon alapján történt. A számológépbe beépített másodfokú egyenlőtlenség segítségével a megoldás közvetlenül is megadható.



Mindent a bal oldalra rendeztünk.

Ezzel az egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

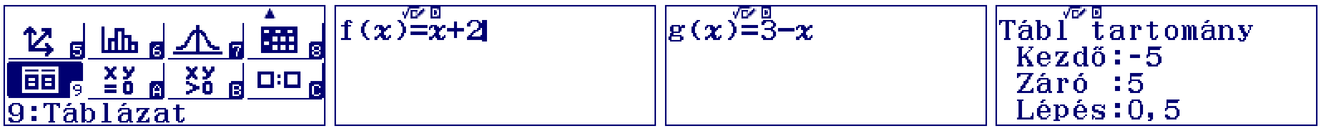
$$-x^2 + 3x + 1{,}75 > 0$$



19 $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x \neq 3$ és $x \in \mathbf{R}$.

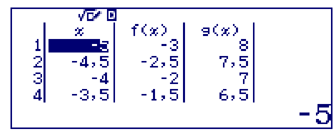
Vizsgáljuk meg a számlálóból és a nevezőből álló két egyenes grafikonját, majd olvassuk le az előjelváltás helyeit.



A két egyenes értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

$f(x) = x + 2$ és

$g(x) = 3 - x$



Az $f(x)$ illetve a $g(x)$ függvények az x-tengelyt a -2 illetve a 3 pontokban metszik.

Az előjelek: $f(x) \geq 0$ ha $x \geq -2$

és $f(x) \leq 0$ ha $x \leq -2$,

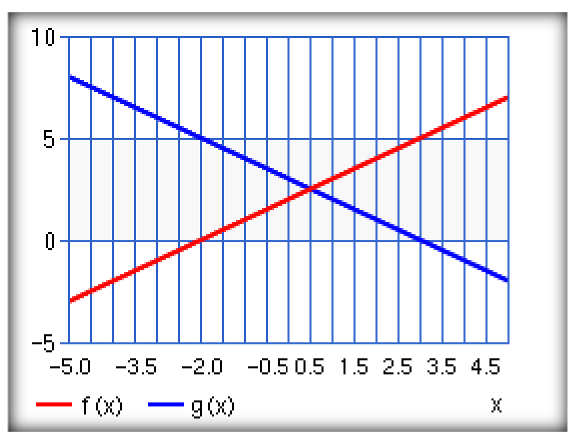
$g(x) > 0$ ha $x < 3$ és

$g(x) < 0$ ha $x > 3$

Két esetet fogunk vizsgálni:

I. $f(x) \geq 0$ és $g(x) > 0$

II. $f(x) \leq 0$ és $g(x) < 0$



A megoldások:

I. $x \geq -2$ és $x < 3$ azaz $x \in [-2;\ 3[$

II. $x \leq -2$ és $x > 3$. Ez az eset nem lehetséges.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x \in [-2;\ 3[$.

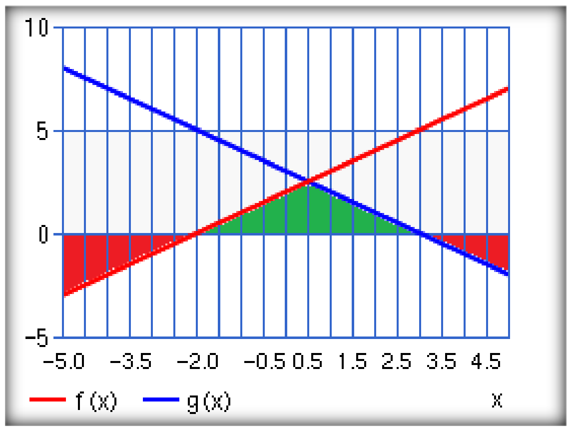
Megjegyzés: a második grafikonon pirossal, illetve zölddel jelöltük a negatív, illetve a pozitiv tartományokat. Látható, hogy a két piros tartománynak nincs közös eleme, így az

$f(x) \le 0$

és

$g(x) < 0$

nem lehetségesek egyszerre.

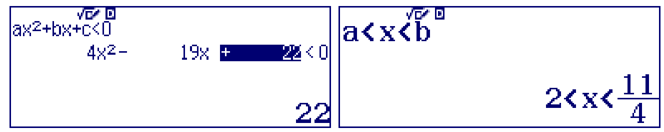


20

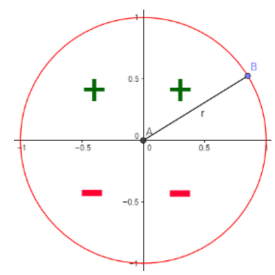
Jelölje a $4x^2-19x+22<0$ egyenlőtlenség való megoldásainak halmazát *A*, a $\sin 2x<0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmazát pedig *B*. Igazolja, hogy $A\subset B$.

Foglalkozzunk először a $4x^2-19x+22<0$ egyenlőtlenséggel.

Megoldás: $2<x<2,75.$



Tekintsük ezek után az $\sin 2x<0$ egyenlőtlenséget. A szinusz fügvény előjelét az egységkörben szemléltetjük:



Látható, hogy a sin függvény negatív ha $x\in\left]\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k\right[$ másképpen

$x\in\left]3,14+6,28k;\ 6,28+6,28k\right[$ (közelítő)

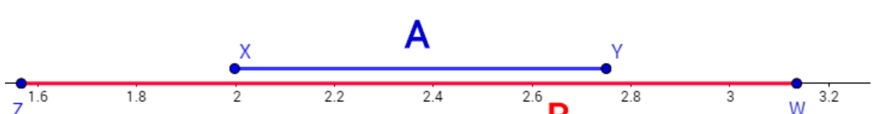
A $\sin 2x<0$ egyenlőtlenség megoldása:

$$\pi+2\pi k<2x<2\pi+2\pi k\Rightarrow\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\pi+\pi k.$$

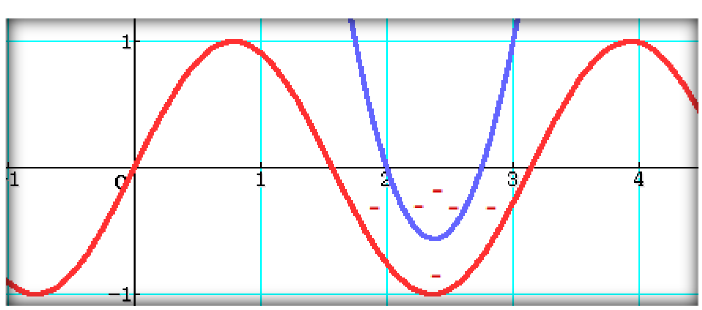
Másképpen: $1,57+k\cdot 3,14<x<3,14+k\cdot 3,14$ (közelitő)

Ebben az intervallumban végtelen sok (azonos) megoldás van. A *k* érékét a $2<x<2,75$ intervallumnak megfelelően 0-nak kell választanunk.

Megoldás:



- Oldjuk meg a feladatot a két függvény $f(x)=4x^2-19x+22$ és $g(x)=\sin(2x)$ ábrázolásával. A negítív tartományokat mínusz jellel jelöltük.

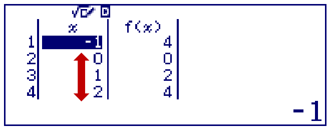


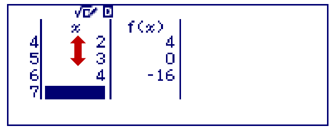
21

Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe. Igazolja, hogy ha $x \in \left]0;\ 3\right[$ akkor $y > 0$.

Előkészítés

Rajzoljuk fel az $y = 3x^2 - x^3$ függvény képét.





A táblázat mutatja a függvény pozitiv a $x \in \left]0;\ 3\right[$ intervallumban.

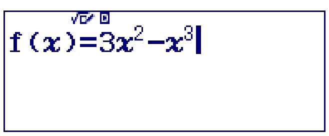
**

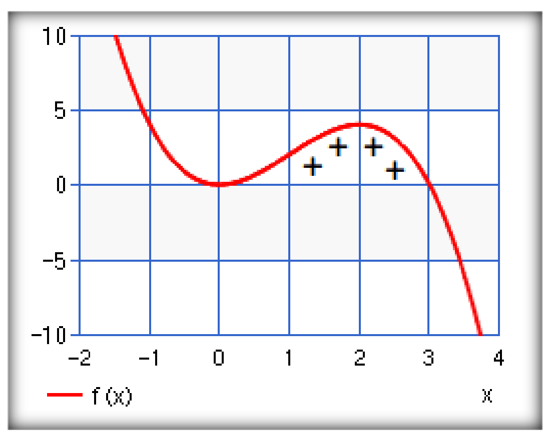
Oldjuk meg az $y > 0$ egyenlőtlenséget!

$3x^2 - x^3 > 0 \Rightarrow x^2\left(3 - x\right) > 0.$

Egy szorzat pozitív, ha egyszerre mindkét tényező pozitív vagy negatív

$x^2 \geq 0$ and $\left(3 - x\right) > 0.$





Megoldás: $x > 0$ és $3 > x$.

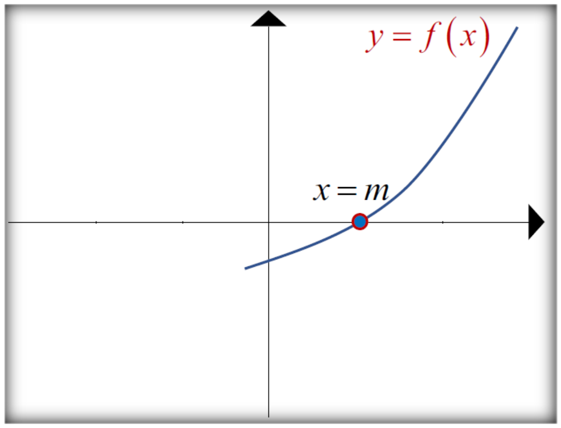
A tartományok $y_{\min} = -10$ és $y_{\max} = 10$

Így $y > 0$ ha $0 < x < 3.$

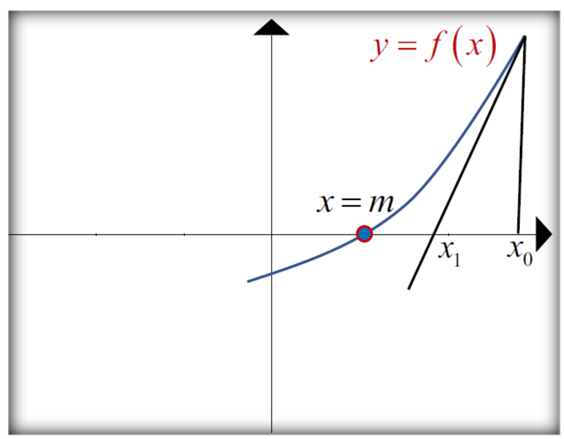
Ezt kellet bizonyítani.

A NEWTON-RAPHSON MÓDSZER

Adott az $[a;\ b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény. Tegyük fel, hogy $x = m$ a függvény zérushelye, azaz $f(m) = 0$. Mutassuk be a Newton-Raphson gyökkereső algoritmust!



Legyen $x_0 \in [a;\ b]$ a gyök első közelítése. Húzzuk meg az $x = x_0$ pontban a függvény érintőegyenesét. Az érintőegyenes és az x tengely metszéspontja legyen x_1. Tekintsük ezt a számot a gyök második közelítésesnek. Ha $f(x_1) = 0$, úgy készen vagyunk, ha nem, akkor folytassuk az eljárást az újabb x_1 ponttal.

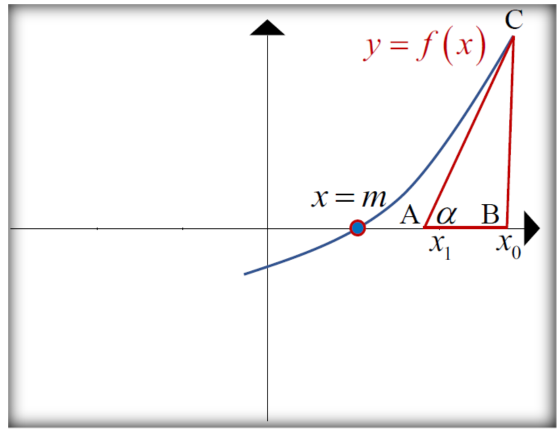


Az $x_0,\ x_1,\ x_2 \ldots$ értékek sorozata az egyenlet gyökét tetszőleges pontossággal *megközelíthetik*. Ezzel a zérushelyhez közeli érintőegyenesek jó közelítéssel a függvénygörbét is helyettesítik a zérushely és a közelítés közötti tartományon. A Newton-Raphson módszer megadható az alábbi rekurzív formulával is:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \left(f'(x_n) \neq 0 \right)$$

Az iteráció a gyök becslésével (x_0) kezdődik majd folytatódik az $x_1,\ x_2 \ldots$ értékek keresésével. A középiskolában nem foglalkozunk annak bizonyításával, hogy a fenti sorozat mely esetekben konvergens, ugyanakkor szemléletes képet adhatunk arról, hogyan keletkezik a sorozat.

Tekintsük az *ABC* háromszöget!



$$tg\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$tg\alpha = f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow$$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Az eljárást folytatva, a fenti rekurzív formulát kapjuk.

A módszert egy példával szemléltetjük. Adjuk meg a következő másodfokú egyenlet megoldását érintőegyenesekkel és a fenti rekurzív sorozattal is:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

A megoldások: $x_1 = 2$ és $x_2 = 3$.

Megoldás érintőegyenesek segítségével.

Először, adjunk a feltételezett megoldáshoz közeli értéket.

Az első sejtés 6. A közelítés befejeztével az $x = 3$ megoldásra számítunk. A megoldás során a közelítés gyorsaságát is megfigyelhetjük.

Megjegyzés: a megoldás létezésére az előjel váltásból következtetünk. Ehhez készítsük el a függvényértékek táblázatát vagy próbálgassunk:

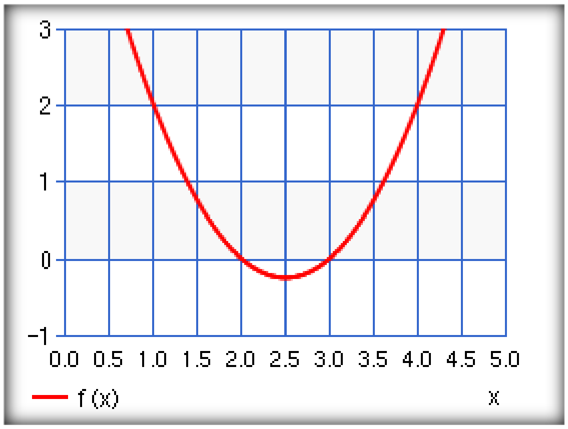
$f(x = 2{,}5) = 2{,}5^2 - 5 \cdot 2{,}5 + 6 = -0{,}25$ és

$f(x = 6) = 6^2 - 5 \cdot 6 + 6 = 12$

$f(2{,}5) < 0$ és

$f(6) > 0 \Rightarrow$ 2,5 és 6 között van egy zérushely.

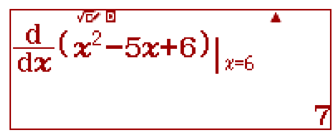
Rajzoljuk fel a függvény képét.



Első közelítés

A következő lépés, hogy adjuk meg a függvény meredekségét az $x_0 = 6$ pontban. A számológép segítségével ezt könnyen megtehetjük:

A függvényérték az $x = 6$ pontban 12. $\left(6^2 - 5 \cdot 6 + 6 = 12\right)$

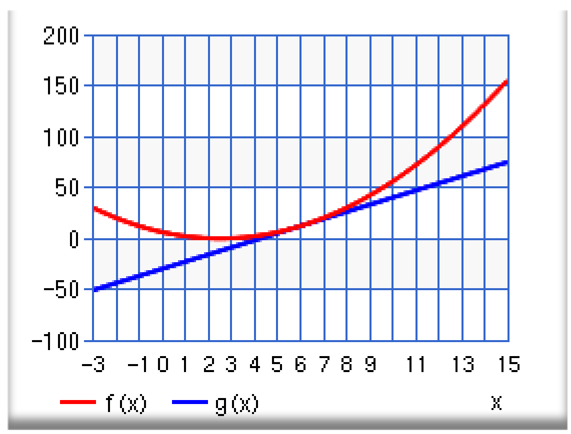


Az érintő egyenes meredeksége 7.

Az érintő egyenes egyenlete $y = mx + b$.

$12 = 7 \cdot 6 + b \Rightarrow b = -30 \Rightarrow$

$y = 7x - 30$



Közelítsük a megoldást az érintő egyenes felrajzolásával az $x = 6$ pontban, majd határozzuk meg az egyenes zérushelyét:

$$y = 0 \Rightarrow 7x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{30}{7} \approx 4,28.$$

$\boxed{x_1 = 4,28}$

A megoldás első közelítése 4.28 ami közelebb van az ismert megoldáshoz $x = 3$.

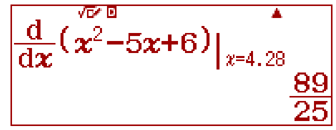
$(|3 - 4,28| = 1,28$ és $|2 - 4,28| = 2,28)$

A valóságban ez nem ismert.

Második közelítés

Most 4,28 a következő közelítés.

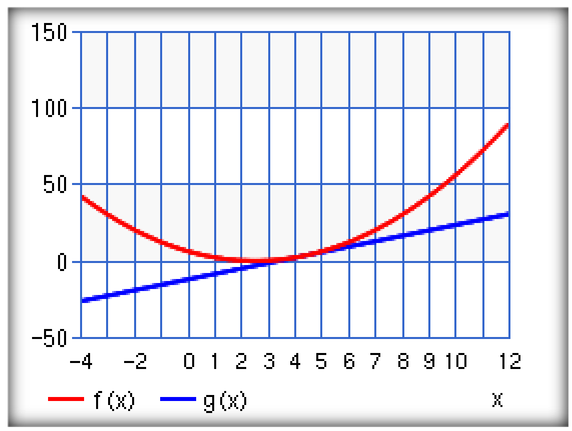
A procedúra ugyanaz, mint korábban: az érintő egyenes meredeksége $\frac{89}{25}=3,56$.



A függvény érték az $x=4,28$ pontban $\frac{1824}{625}\approx 2,91$.

Az érintő egyenes egyenlete $y=mx+b$ így $2,91=3,56\cdot 4,28+b\Rightarrow b=-12,33$.

Az érintő egyenes egyenlete a behelyettesítés után:



$y=3,56x-12,33$

Az egyenes zérushelye

$y=0\Rightarrow 3,56x-12,33=0\Leftrightarrow x=3,46.$

$\boxed{x_1=3,46}$

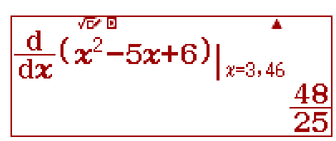
Azt találtuk, hogy a megoldás második közelítése (3,46) közelebb van az $x=3$ értékhez.

($|3-3,46|=0,46$ és $|2-3,46|=1,46$)

Harmadik közelítés

Most 3,46 lesz a következő közelítés.

A procedúra nem változik:



A meredekség $\frac{48}{25}=1,92$.

A függvényérték az $x=3,46$ pontban $\frac{1679}{2500}\approx 0,67$.

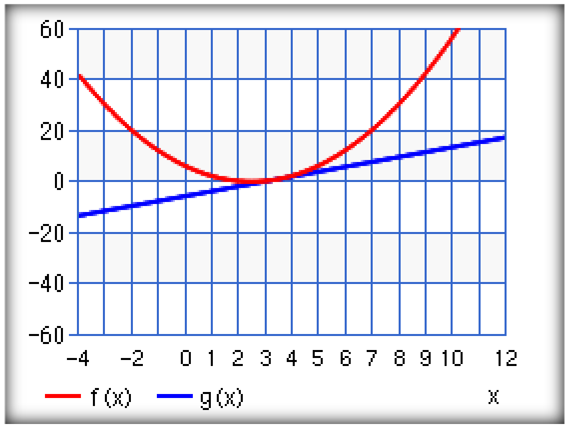
Az érintő egyenes egyenlete $y=mx+b$.

$0,67 = 1,92 \cdot 3,46 + b \Rightarrow b = -5,97 \Rightarrow$

$y = 1,92x - 5,97$

$y = 0 \Rightarrow 1,92x - 5,97 = 0 \Rightarrow x = 3,1$

$\boxed{x_3 = 3,1}$



A harmadik közelítés (3,1) sokkal közelebb van az $x = 3$ megoldáshoz. Az iterációt befejeztük. Az eljárást folytatva, az $x = 3$ megoldás tetszőleges pontossággal megközelíthető. Ha egy 6-nál nagyobb számmal kezdünk, a megoldás ugyanaz.

Megoldás rekurzív sorozattal

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Alkalmazzuk a rekurzív formulát az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenletre.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$\boxed{x_0 = 6}$

kezdőértékkel.

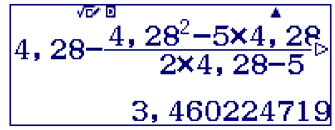
$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\ 2} - 5x_n + 6}{2x_n - 5}$$

$$x_1 = 6 - \frac{6^2 - 5 \cdot 6 + 6}{2 \cdot 6 - 5} = 6 - \frac{12}{7} \approx 4,28$$

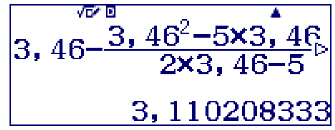
$\boxed{x_1 = 4,28}$

$$x_2 = 4,28 - \frac{4,28^2 - 5\cdot 4,28 + 6}{2\cdot 4,28 - 5} \approx 3,46$$



$$\boxed{x_2 = 3,46}$$

$$x_2 = 3,46 - \frac{3,46^2 - 5\cdot 3,46 + 6}{2\cdot 3,46 - 5} \approx 3,11$$



$$\boxed{x_2 = 3,11}$$

▼ Adjuk meg a következő egyenlet megoldásait:

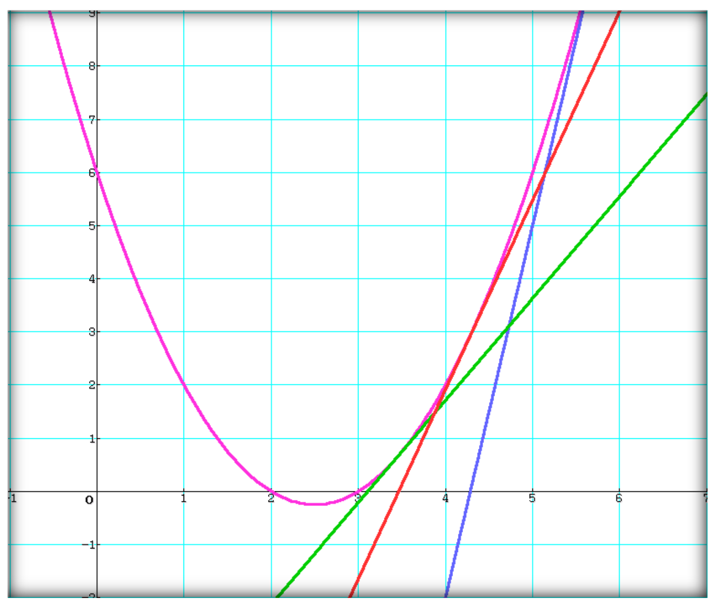
$e^x = x + 2$ ahol $e \approx 2,71$

Megjegyzés: A lenti ábrán az érintő egyenesek (kék, piros, zöld) grafikonja látható. Jól látszik, ahogyan az egyenesek zérushelyei megközelítik az $x = 3$ megoldást.

$y = 7x - 30$

$y = 1,92x - 5,97$

$y = 3,56x - 12,33$

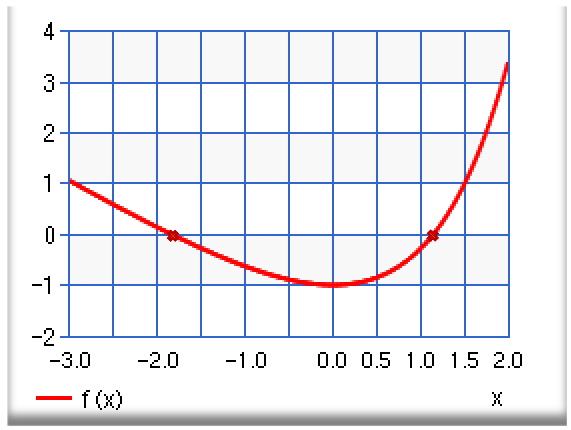


A KITŰZÖTT FELADAT MEGOLDÁSA

22 $e^x = x + 2$

Tekintsük a következő függvényt és keressük meg a zérushelyeit:

$f(x) = e^x - x - 2$



Úgy tűnik, hogy két megoldás van:

$x \approx -2$ vagy $x \approx 1$

Első megközelítés

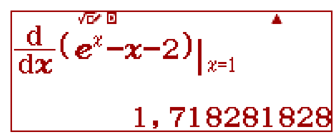
$$f(x=0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(x=2) = e^2 - 2 - 2 \approx 3{,}39$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x=0) < 0 \\ f(x=2) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Előjelváltás 0 és 2 között.}$$

Így, legyen a kezdőérték:

$\boxed{x_0 = 1}$

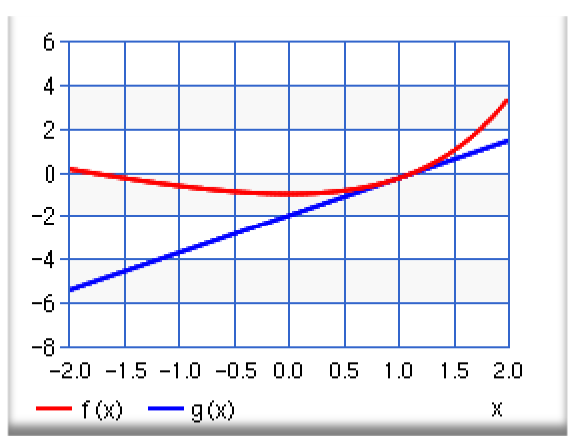


Az érintő egyenes meredeksége $\approx 1{,}72$. A függvényérték az $x = 1$ pontban:

$$f(1) = e^1 - 1 - 2 = e - 3$$

Az érintő egyenes egyenlete:

$$y = mx + b$$



$$e - 3 = 1{,}72 \cdot 1 + b \Rightarrow b = e - 4{,}72 \approx -2$$

$$y = 1{,}72x - 2$$

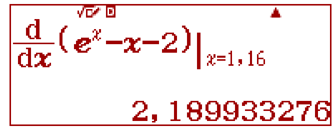
$$y = 0 \Rightarrow 1{,}72x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}16$$

$\boxed{x_1 = 1{,}16}$

Második megközelítés

A kezdőérték: $x_1 = 1{,}16$

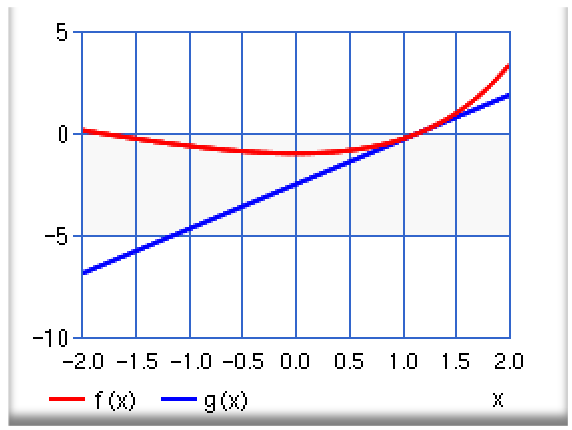
Az érintő egyenes meredeksége $\approx 2{,}19$



A függvényérték az $x = 1{,}16$ pontban:

$$f(1{,}16) = e^{1{,}16} - 1{,}16 - 2 \approx 0{,}03$$

Az érintő egyenes egyenlete:



$$y = mx + b$$

$$0{,}03 = 2{,}19 \cdot 1{,}16 + b$$

$$b = 0{,}03 - 2{,}19 \cdot 1{,}16 \approx -2{,}51$$

$$y = 2{,}19x - 2{,}51$$

$$y = 0 \Rightarrow 2{,}19x - 2{,}51 = 0$$

$$\boxed{x_2 = 1{,}14}$$

Az iterációt befejeztük. A függvényérték az $x = 1{,}14$ pontban:

$$f(1{,}14) = e^{1{,}14} - 1{,}14 - 2 \approx -0{,}013 \approx 0$$

További közelítések az alábbi táblázatban:

n	x
1	1,16395
2	1,14642
3	1,14619
4	1,14619

$$\left(f(1{,}14619) = e^{1{,}14619} - 1{,}14619 - 2 \approx -6{,}9 \cdot 10^{-6} \right)$$

Megjegyzés A:

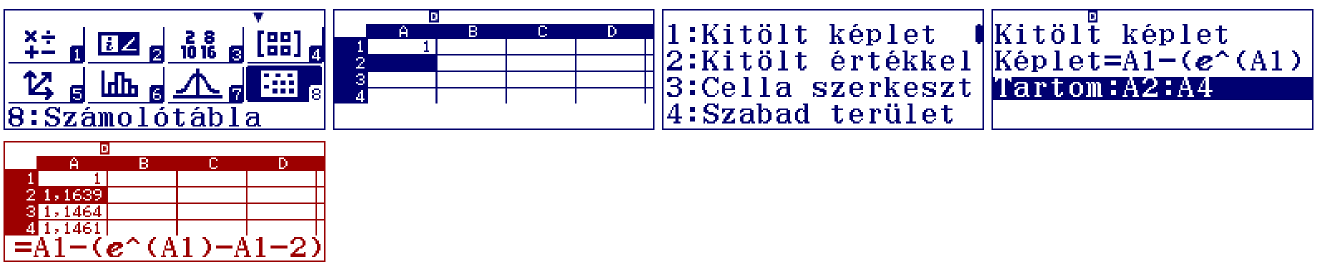
A Newton-Raphson iterációs formula: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ ahol $i = 0,1,2...$

Az $f(x)$ deriváltja $f(x) = e^x - x - 2 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1$

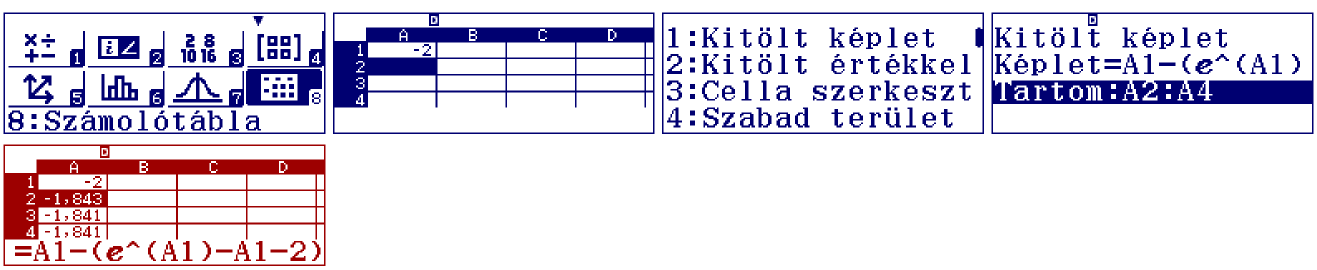
$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{x_i} - x_i - 2}{e^{x_i} - 1}$$

A kezdőérték $x_0 = 1$.

$$x_{i+1} = A1 - \left(e \wedge (A1) - A1 - 2\right) : \left(e \wedge (A1) - 1\right)$$

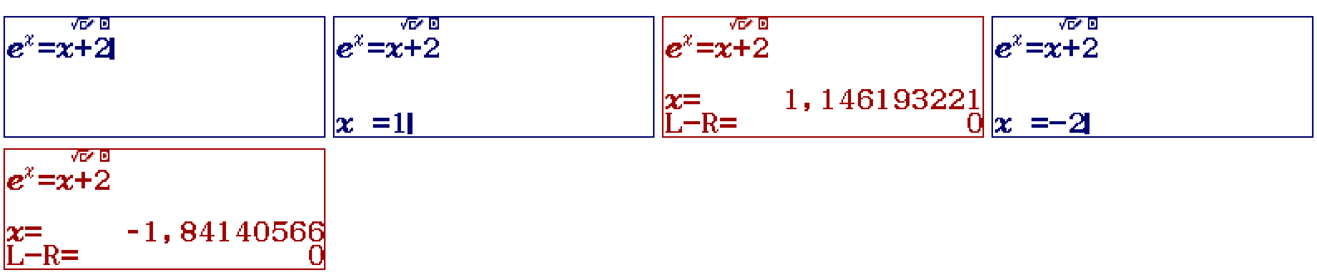


A kezdőérték $x_0 = -2$. $x_{i+1} = A1 - \left(e \wedge (A1) - A1 - 2\right) : \left(e \wedge (A1) - 1\right)$



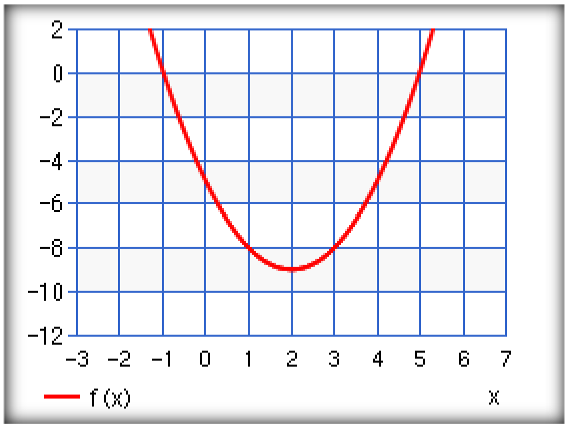
Megoldás: $x \approx 1{,}146$ és $x \approx -1{,}841$.

Megjegyzés B: Írjuk be az egyenletet:



NEWTON-RAPHSON VS SZÁMOLÓGÉP

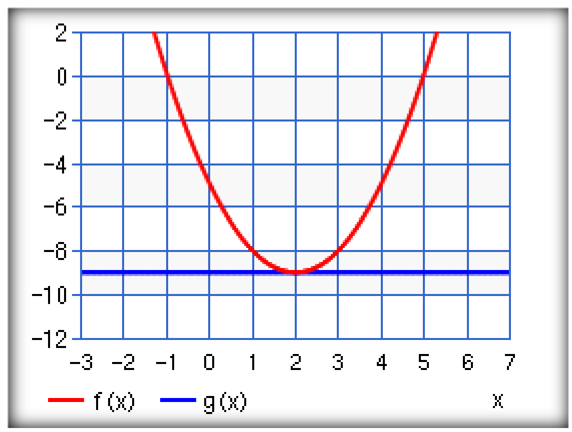
Alkalmazzuk az $x^2-4x-5=0$ egyenletre a Newton-Raphson módszert az $x_0=2$ sejtéssel!



Adjuk meg a derivált értékét és húzzuk meg az érintőegyenest az $x_0=2$ pontban.

$f(x)=x^2-4x-5 \Rightarrow f'(x)=2x-4$ így

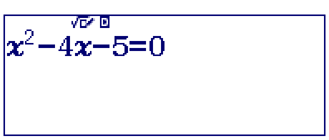
$f'(2)=2\cdot 2-4=0$

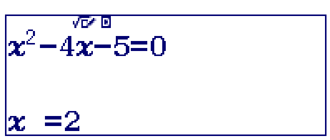


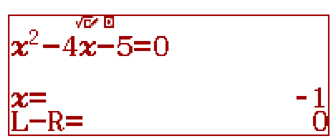
Látjuk, hogy az $x_0=2$ pontban húzott érintő párhuzamos az x tengellyel, így azt soha nem metszi. A Newton-Raphson módszer nem alkalmazható.

A hiba abból adódott, hogy az $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozatban, $f'(x_0)=0$.

Most nézzük meg, hogy a számológép milyen megoldást ad!







A számológéphez tartozó program tehát felismerte, hogy a derivált 0, és automatikusan más kezdőértékkel próbálkozott, ebből adódott az $x=-1$ megoldás.

A NEWTON-RAPHSON MÓDSZER NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

Érdekes lehet a Newton-Raphson formula alkalmazása néhány speciális egyenletre.

$\boxed{\text{A. } ax+b=0}$

$f(x)=ax+b \Rightarrow f'(x)=a$.

Az $x_0=c$ $(c\in\mathbf{R})$ sejtést használjuk.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=c-\frac{ac+b}{a}=-\frac{b}{a}$$ (Az x_1 értéke független az ismeretlentől)

Megoldás: $x=-\dfrac{b}{a}$

$\boxed{\text{B. } x^2-a=0 \text{ (Az } a \text{ szám négyzetgyökének közelítése)}}$

$f(x)=x^2-a \Rightarrow f'(x)=2x$.

Az $x_0=c$ $(c\in\mathbf{R}\setminus\{0\})$ sejtést használjuk.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=c-\frac{c^2-a}{2c}=\frac{c^2+a}{2c}=\frac{1}{2}\left(c+\frac{a}{c}\right).$$

Legyen $d=\dfrac{1}{2}\left(c+\dfrac{a}{c}\right)$ a következő közelítés.

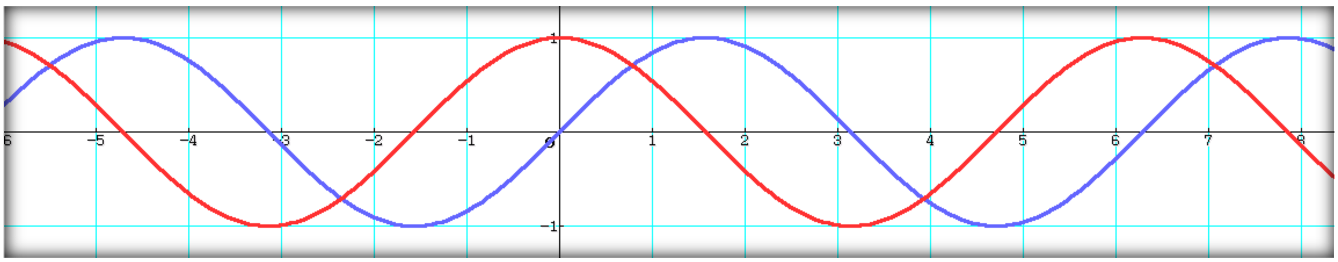
$$x_2=\frac{1}{2}\left(d+\frac{a}{d}\right)$$

Megoldás: $x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}}\right)$

A TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK PERIÓDUSÁRÓL

Az f függvényről azt mondjuk, hogy periodikus a p periódussal (p nem nulla), ha $f\left(x+p\right)=f\left(x\right)$ minden az értelmezési tartományába eső x értékekre. Például a sin, cos, tg, ctg függvények mind periodikusak 2π szerint (sin, cos) és 2π szerint (tg, ctg):

$\sin\left(x+2\pi\right)=\sin x$ $\quad\cos\left(x+2\pi\right)=\cos x$ $\quad tg\left(x+\pi\right)=tgx$ $\quad \mathrm{ctg}\left(x+\pi\right)=\mathrm{ctg}x$



A sin periódusa 2π de mi a helyzet a $2\sin x$ vagy $\sin\left(2x\right)$ függvények periódusával?

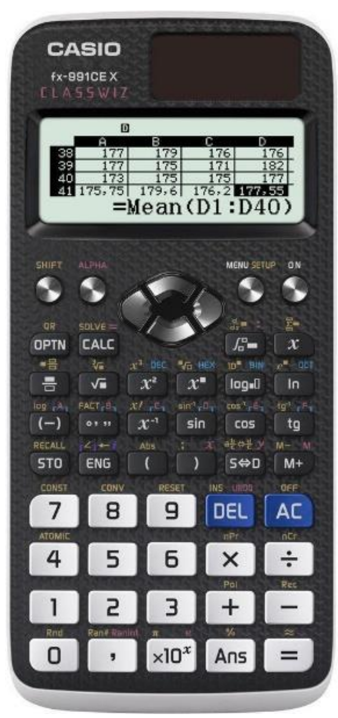
Hasonló kérdések merülnek fel más trigonometrikus függvényekkel kapcsolatban. A trigonometrikus függvények periódusa *nem változik*, ha a függvényt szorozzuk (osztjuk), egy nem nulla számmal vagy kivonunk (hozzáadunk) egy (nem nulla) számot. A peridus a következő esetekben ugyanaz: $\sin x$; $\pm a\pm\sin x$; $\pm a\cdot\sin x$; $\pm\frac{a}{b}\cdot\sin x$; $\left(a,b\neq 0\right)$

A periódus változik, ha a változót szorozzuk (osztjuk) egy (nem nulla) számmal.

A $\sin\left(k\alpha\right)$, $\cos\left(k\alpha\right)$ periódusa $\frac{2\pi}{|k|}$ a $tg\left(k\alpha\right)$, $ctg\left(k\alpha\right)$ periódusa $\frac{\pi}{|k|}$ ahol $k\in \mathrm{Z}\setminus\{0\}$

STATISZTIKA

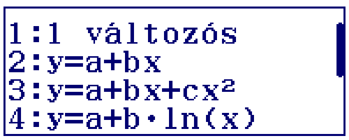
CASIO FX-991CE X



STATISZTIKAI SZÁMÍTÁSOK A CASIO fx-991CE X-SZEL

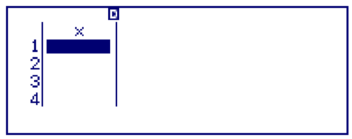
EGYVÁLTOZÓS STATISZTIKAI MÓD:

MENU 6 1



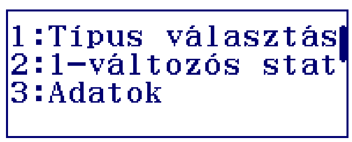
ADATOK BEVITELE:

MENU 6 1



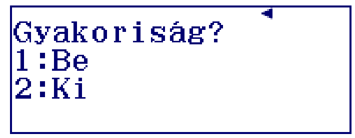
AZ ADATOK BEVITELE UTÁN, A STATISZTIKÁK (ÁTLAG, SZÓRÁS, MINIMUM, MAXIMUM STB.):

OPTN 2 (1-változós stat)



GYAKORISÁGI ÜZEMMÓD:

SHIFT MENU ▼ 3



Tartalomjegyzék

Ennek a szekciónak a célja az, hogy bemutassa a medián, a mód és a szórás számítását a Casio fx-991CE X számológéppel. Emellett véletlen számokkal, kódolással, diagramokkal, korrelációval és (lineáris) regresszióval is foglalkozok.

A fejezet végén a valószínűségszámítás és kombinatorika témaköréből mutatok be néhány feladatot és azok megoldásait. A fontosabb eloszlások (Normális, Bernoulli, Binomiális, Geometriai, Exponenciális stb.) nem kerülnek elő ebben a jegyzetben. Remélhetőleg, a jövőben lesz lehetőség arra is, hogy megvizsgáljuk ezen eloszlásokat számológép segítségével. Az érdeklődő olvasó sok hasznos tanítási anyagot találhat (több nyelven) a Casio honlapján.

Ez a fejezet a magyarországi házasságok és válások vizsgálatával kezdődik. Ezekből az adatokból szórásdiagrammot (pontfelhő) készítünk, megkeressük a pontokra legjobban illeszkedő egyenest, és elemezzük a két változó közötti kapcsolatot is.

Fontos hangsúlyozni, hogy jó kérdések és elemzések nélkül a számológép-használat nem hatékony és félreértésekre adhat okot. A számológép-használattal párhuzamosan mindig kérdezni kell. Például (lásd 25. probléma):

A. A kevesebb házasságkötés jelenthet kevesebb válást is (oda-vissza)? Mennyire megalapozott megjósolni a házasságok számát a válásokból?

B. Hogyan dönthető el, hogy a lineáris modell megfelel-e a házasság és válás közötti kapcsolat modellezéséhez?

C. Vessük össze a lineáris regresszióhoz tartozó meredekséget a normál egyenes meredekségével. Mi a különbség?

A problémamegoldás során a számológép-használat volt a hangsúlyos, nem pedig az adatok elemzése vagy a statisztika tanítása. A számológépet mindig természetes módon használtam, így, ha nem láttam értelmét, akkor nem erőltettem.

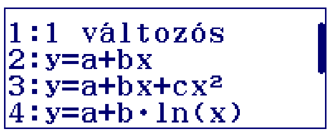
23

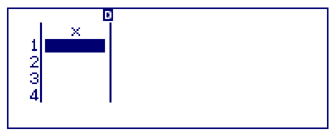
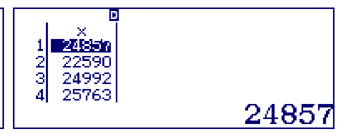
Az alábbi táblázat a válások számát mutatja Magyarországon az 1995-2008 közötti időszakban.

1995.	*1996.*	*1997.*	*1998.*	*1999.*	*2000.*	*2001.*
24857	22590	24992	25763	25605	23987	24391
2002.	***2003.***	***2004.***	***2005.***	***2006.***	***2007.***	***2008.***
25506	25046	24638	24804	24869	25160	25155

Határozzuk meg a válások átlagát, varianciáját, szórását, terjedelmét, mediánját!

Váltsuk át a számológépet *Statisztika* módba majd, írjuk be az adatokat:



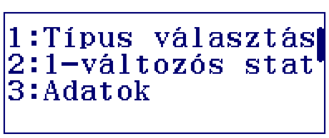



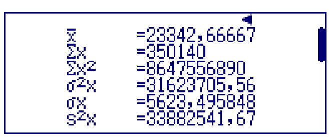
Az adatok bevitele után a tároláshoz nyomjuk meg az AC gombot.

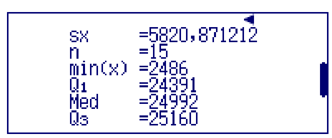
Ezt követően ellenőrizzük a bevitt adatokat!

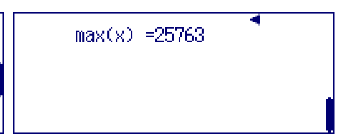
A számológép a fontosabb statisztikákat rögtön megadja: az elemek száma, a minimum-maximum értékek hasznos segítségek a beírt adatok ellenőrzéséhez.

Az OPTN majd a 2 gomb *(1-változós stat)* megnyomása után a következőt látjuk:

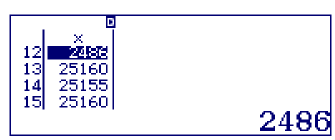






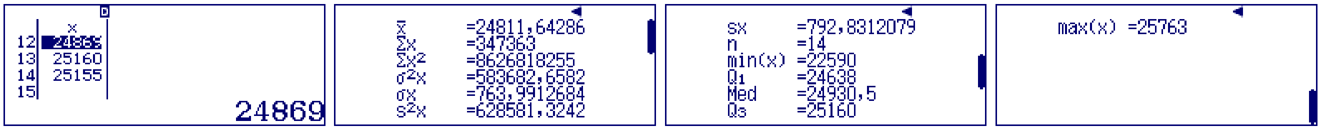


Két hibát is észrevehetünk: az egyik, hogy az elemek száma *(n)* 15, holott 14 elemből áll a táblázat, továbbá a legkisebb érték *(min(x))* 2486.



A táblázatból látható, hogy a minimum érték ennél sokkal nagyobb. A hiba abból adódott, hogy a 2006. évhez tartozó adatnál az utolsó számjegyet lefelejtettük, illetve a 15. elem a 2007. évi adat.

Javítva a hibákat a helyes statisztika:



Megoldás:

Átlag $(\overline{x}) = 24811$;

Variancia $(\sigma^2 x) = 583682$;

Szórás $(\sigma x) \approx 764$;

Terjedelem$= max(x) - min(x) = 25763 - 22590 = 3173$;

Medián$= 24930{,}5.$

24

Az alábbi táblázat a válások számát mutatja Magyarországon az 1995-2008 közötti időszakban.

1995.	***1996.***	***1997.***	***1998.***	***1999.***	***2000.***	***2001.***
24857	22590	24992	25763	25605	23987	24391
2002.	***2003.***	***2004.***	***2005.***	***2006.***	***2007.***	***2008.***
25506	25046	24638	24804	24869	25160	25155

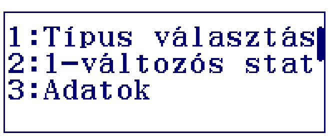
Rajzoljuk meg az adatokból álló oszlopdiagramot, kördiagramot, box-plot diagrammot!

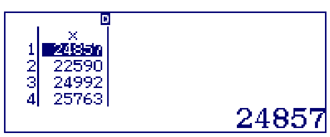
A korábban bevitt adatokat használjuk.

Nyomjuk meg az OPTN gombot és válasszuk a 3 gombot (*Adatok*).

A táblázatokhoz tartozó QR kód a SHIFT és OPTN gombok megnyomásával hívható elő. Ha ClassWiz emulátorral dolgozunk, akkor kattintsunk egyszer a QR kódra. A diagramok egy új lapon jelennek meg.

A grafikonok közötti váltást ikonok jelzik.



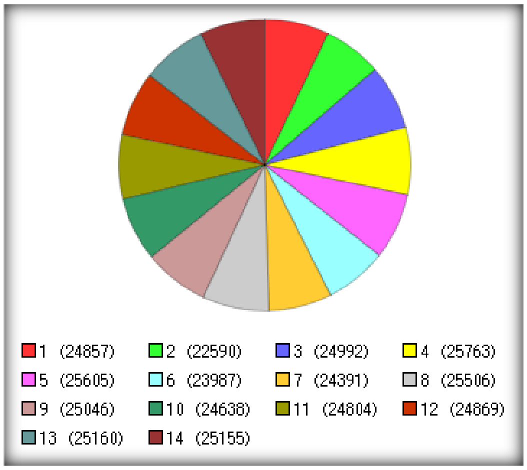


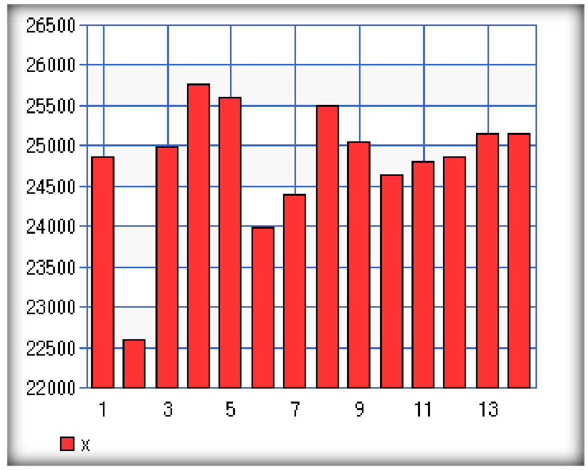
Megjegyzés:

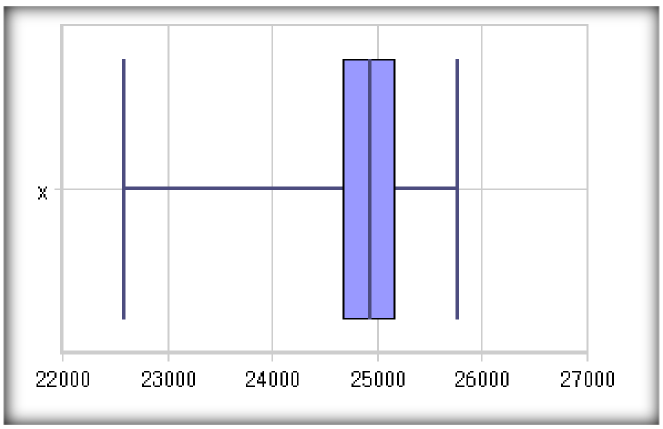
A) Amíg nem váltunk módot, addig a korábban tárolt adatok visszahívhatók és szerkeszthetők. Az adatok a számológép kikapcsolása után sem vesznek el.

B) A bekapcsolást követően a kezdő képernyő *Statisztika* módban jelenik meg.

A feladathoz tartozó diagrammok:







25 Az alábbi táblázat a válások számát mutatja Magyarországon az 1995-2008 közötti időszakban.

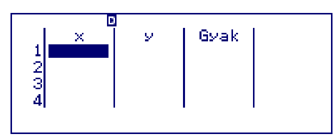
1995.	*1996.*	*1997.*	*1998.*	*1999.*	*2000.*	*2001.*
24857	22590	24992	25763	25605	23987	24391
2002.	***2003.***	***2004.***	***2005.***	***2006.***	***2007.***	***2008.***
25506	25046	24638	24804	24869	25160	25155

Egészítsük ki a táblázatot az ugyanezen időszakban kötött házasságkötések számával. Határozzuk meg a *Pearson*-féle korrelációs együttható értékét és a lineáris regresszióhoz tartozó grafikont és egyenletet! Az egyenlet alapján következtessünk a válások számára 2016-ban, ha tudjuk, hogy a házasságkötések száma 51 800 volt az említett évben!

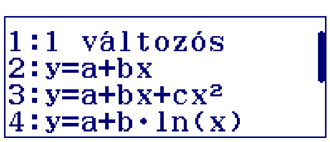
A kiegészített táblázat:

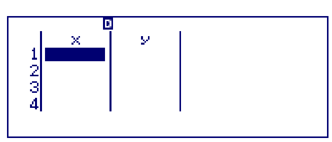
1995.	*1996.*	*1997.*	*1998.*	*1999.*	*2000.*	*2001.*
24857	22590	24992	25763	25605	23987	24391
53463	48930	46905	44915	45465	48110	43583
2002.	***2003.***	***2004.***	***2005.***	***2006.***	***2007.***	***2008.***
25506	25046	24638	24804	24869	25160	25155
46008	45398	43791	44234	44528	40842	40105

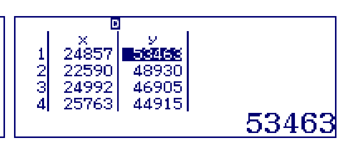
Megjegyzés: az eddigiek folyamán egy változóval (*x*) dolgoztunk. A továbbiakban két változót (*x*, *y*) használunk.



A kétváltozós *Statisztika* üzemmódban gyakoriságot is rendelhetünk az egyes értékpárokhoz (ehhez először kapcsoljuk be a *Gyakoriság-i* módot). A táblázatban nem található két azonos értékpár, így ezt a funkciót kikapcsoltuk. Vigyük be az adatokat majd ellenőrizzük azokat!

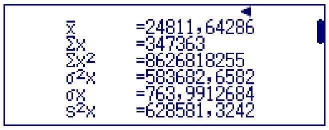


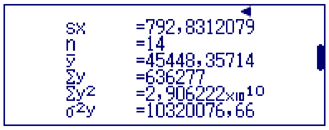


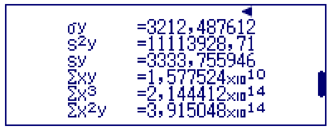


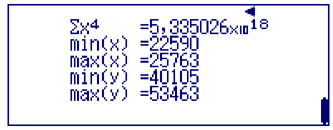
Tároljuk az adatokat!

Az adatok ellenőrzéséhez használhatjuk a minimum, maximum értékeket. Most nyomjuk meg az OPTN 2 gombokat.





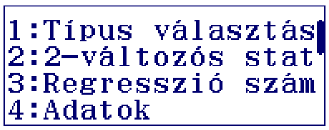


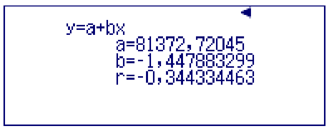


Látható, hogy a minimum, maximum értékek megegyeznek a bevitt értékekkel.

Megjegyzés: az adatokat a QR kód segítségével áttekinthető formában is ellenőrizhetjük. Ehhez lépjünk vissza az *Adatok* mezőbe, és generáljunk QR kódot. A beírt értékek ezt követően táblázatban jelennek meg.

Nyomjuk meg az OPTN gombot, és válasszuk ki a 3-as opciót *(Regresszió szám)*.



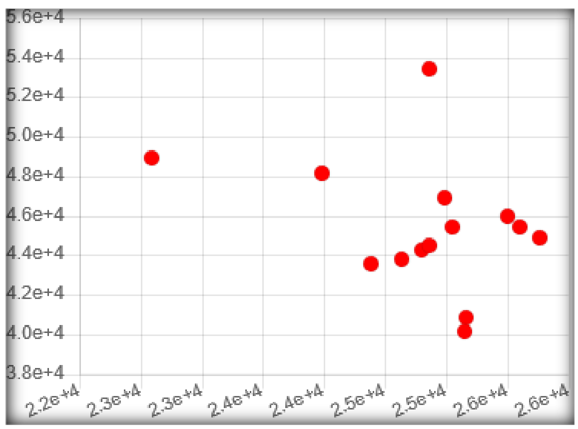


Azt kaptuk, hogy a korrelációs együttható értéke $r \approx -0,34$.

A lineáris regresszióhoz tartozó egyenlet pedig $y = 81372,72 - 1,45x$.

A regresszióhoz tartozó diagram az adatokból nyerhető.

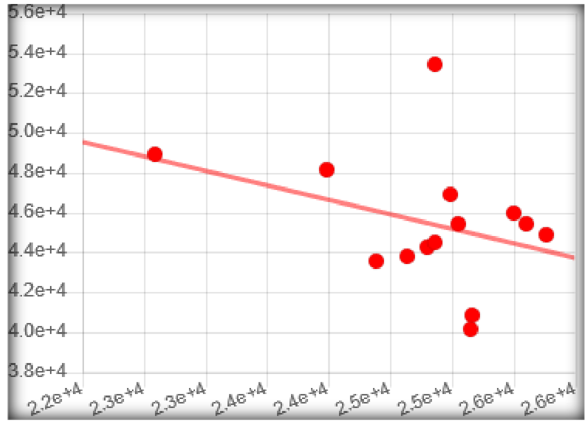
Nyomjuk meg az OPTN gombot, és válasszuk a 4-es opciót *(Adatok)*. Ezt követően a QR kód és a grafikon így néz ki:



Az egéren lévő görgővel nagyíthatjuk a diagramot, illetve mozgathatjuk is (ezzel a tengelyeken lévő beosztások automatikusan változnak). Érdemes kipróbálni!

Megjegyzés: a korrelációs együttható értéke közepesen negatív (az egyenes meredeksége negatív). A pontokhoz tartozó diagram jól mutatja ezt.

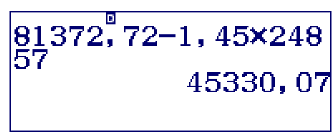
Most rajzoljuk be a lineáris regresszióhoz tartozó egyenest!



Megjegyzés: Az online megjelenítés segítségével a különböző típusú regressziókat is tesztelhetjük. A választható opciók: exponenciális $(ab^x,\ ae^x)$, inverz $(a+b/x)$, logaritmikus $(a+b\ln x)$, hatvány $\left(ax^b\right)$, parabolikus $(a+bx+cx^2)$. A kívánt ikonra kattintva a program rögtön felrajzolja a megfelelő görbét.

Mielőtt rátérnénk a házasságkötések számára a 2016. évben, teszteljük a kapott egyenes egyenletét az ismert adatok alapján!

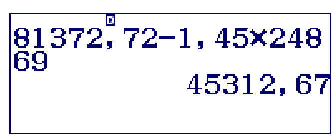
1995-ben a válások száma 24 857 volt.



Az egyenes egyenlete alapján a házasságkötések száma: 45330

(az ismert érték 53463).

A 2006. évben a válások száma 24 869.



A házasságkötések száma 45312

(az ismert érték 44528).

KIEGÉSZÍTÉS

Ha az egyenes egyenletében több x értékhez szeretnénk kiszámolni az y értékét, akkor ezt többféleképpen is megtehetjük.

Első lehetőség:

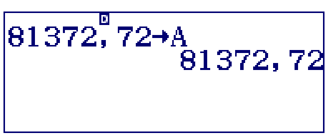
Rendeljük hozzá az a és b paraméterekhez rendre a 81 372,72 és a $-1{,}45$ számokat, majd készítsük el az $a + bx$ kifejezést, ahol az x értékét mi határozzuk meg.

Ez a módszer különösen hasznos, ha a későbbiek folyamán a hozzárendelt érékekkel további műveleteket végzünk.

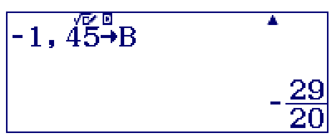
A hozzárendeléshez a STO (storing, vagyis tárolás) gombot használjuk, majd kiválasztunk egy betűt (először A-t). Ezt követően elkészítjük a kívánt kifejezést úgy, hogy az x értékét mi határozzuk meg. Az A változó bevitele után nyomjunk ON gombot a továbblépéshez.

Az $A + Bx$ formában szereplő betűk beviteléhez használjuk az ALPHA gombot, majd a kiválasztott betűt (Az A-hoz a (–) gomb tartozik, a B-hez a °,,, gomb stb.)

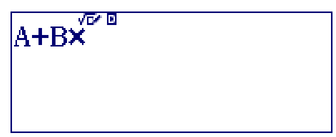
8 1 3 7 2 STO (–)



(–) 1 , 4 5 STO °,,,

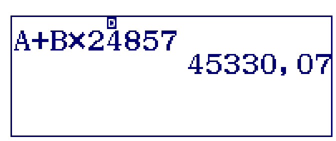


ALPHA (–) + ALPHA °,,, ×



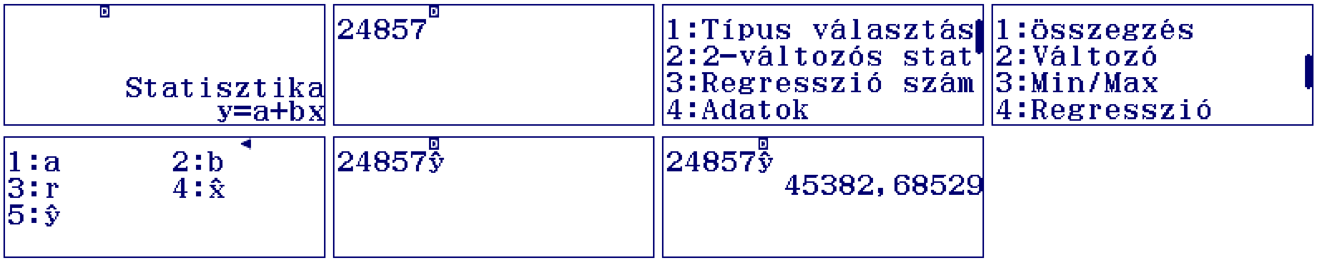
Ha például az 1995. évhez tartozó értékkel számolunk, akkor a szorzás ($\times$) után írjunk 24 857-t.

Az egyenlőség megnyomása után mindig vissza tudunk lépni, és javítania korábban bevitt értéket. Ehhez használjuk a ◀ ▶ ▲ ▼ gombokat.



Második lehetőség:

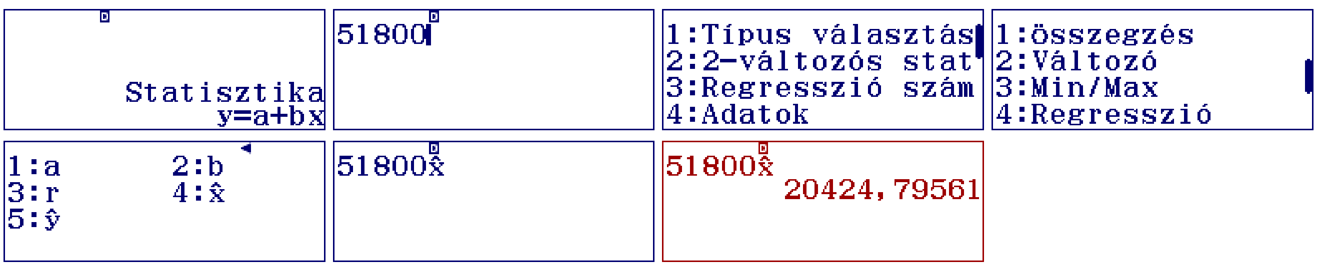
A beírt adatok alapján a számológép közvetlenül is megadja az adott *x*-hez tartozó *y*-t (vagy fordítva).



Megjegyzés: Eltérés tapasztalható a korábban számított értékhez képest, melynek az az oka, hogy a számológép több jegyet vett figyelembe a számolás során.

Ezek után becsüljük meg a válások számát!

Az ismert adatok alapján 2016-ban 51 800 házasságkötés volt.



Azt kaptuk, hogy 2016-ban a válások száma 20424 volt.

A KSH statisztika szerint a tényleges érték 19 600 volt.

Megjegyzés: A *Pearson*-féle korrelációs együttható vagy a lineáris regresszióhoz tartozó grafikon és annak egyenlete nem szerepel a közép - vagy az emelt szintű tanmenetben. Ennek ellenére még középszinten is elképzelhető, hogy ilyen típusú feladatok előkerüljenek (például a fizikában) anélkül, hogy a hozzájuk tartozó összefüggéseket bebizonyítanánk.

ÁTLAG, VARIANCIA, SZÓRÁS, TERJEDELEM, RANDOMSZÁM GENERÁTOR

ÁTLAG

Az átlag (vagy számtani közép) az egyik legismertebb fogalom a statisztikában. Kiszámításánál miden elemet figyelembe veszünk nem úgy, mint pl. a terjedelem vagy a medián esetében. Hátránya azonban, hogy a kiugró értékek hatással vannak az átlagos értékekre.

Attól függően, hogy mik az ismert adatok, az átlag kiszámítása többféleképpen történhet.

A) Az adatok a rendelkezésünkre állnak.

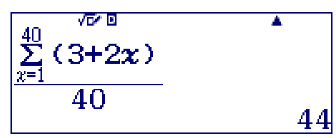
Ebben az esetben az adatok bevitele után az átlag rögtön megkapható.

B) Az összegző $\left(\sum\ \right)$ segítségével.

Előfordul, hogy a tényleges adatokat nem ismerjük, ugyanakkor ismert az adatkhoz tartozó függvény vagy képlet.

26 Például adjuk meg az $a_n = 3 + 2n$ számtani sorozat első 40 elemének átlagát!

Az elemek: $a_1 = 5,\ a_2 = 7, \ldots, a_{40} = 83.$



Megoldás: az elemek átlaga 44.

Megjegyzés: A $\left(\sum\ \right)$ jelet a SHIFT x billentyű kombinációval aktiváljuk.

A nagyon nagy (kicsi) számok átlagánál az adatok bevitele hibaforrás lehet.

27 Határozzuk meg a következő számok átlagát:

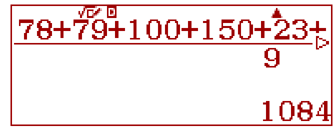
1078	1079	1100	1150	1023	1076	1096	1082	1072

A számok többsége 1000 feletti. Az átlag értéke nem változik, ha ugyanazt a számot kivonjuk (hozzáadjuk) az adatokból, majd a kapott számok átlagához hozzáadjuk (kivonjuk).

Vonjunk ki mindegyik számból 1000-t, majd adjuk hozzá a kapott számok átlagához.
Az új értékek:

78	79	100	150	23	76	96	82	72

Megoldás: a számok átlaga: 1084 (84+1000).



Megjegyzés: az adatokat a QR kód segítségével áttekinthető formában is ellenőrizhetjük. ehhez nyomjuk meg a SHIFT OPTN gombokat az átlag kiszámítása után.

$$\frac{78+79+100+150+23+76+96+82+72}{9}+1000$$

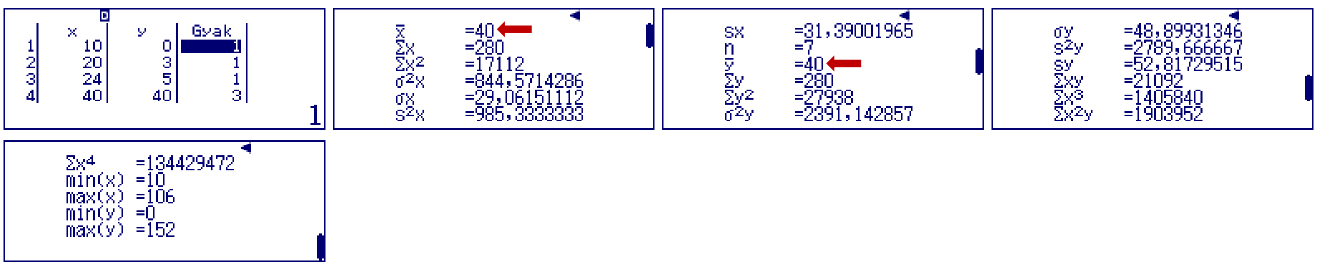
VARIANCIA, SZÓRÁS

Fontos kérdés, hogy az adatoknak milyen az elhelyezkedése az átlag körül. A szórás az adatok szóródását (ingadozását) méri az átlaghoz képest.

28 Adjuk meg a következő adatsokaság átlagát, mediánját és móduszát!

A:	10	20	24	40	40	40	106
B:	0	3	5	40	40	40	152

Gyakoriág bekapcsolása: SHIFT MENU ▼ – 3 1.



Látható, hogy mindkét adathalmaz esetében az átlag=medián=módusz=60.

Ha csupán ennyi információnk lenne, azt is gondolhatnánk, hogy két hasonló adatsokaságról van szó. Összehasonlítva a két sor elemeit, láthatjuk, hogy azok nagyon is különböznek egymástól! (Figyeljük meg például a minimum és maximum értékeket)

Nézzük meg a további jellemzőket a számológép segítségével.

Megjegyzés: ha az átlagtól való eltérés átlagát számolnánk ki, úgy mindig 0-t kapnánk:

$$\frac{1}{n}\left(\sum\left(x_i-\bar{x}\right)\right)=\frac{1}{n}\left(\sum x_i-\sum\bar{x}\right)=\frac{1}{7}\left(270-7\cdot 40\right)=0,$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum\left(y_i-\bar{y}\right)\right)=\frac{1}{n}\left(\sum y_i-\sum\bar{y}\right)=\frac{1}{7}\left(280-7\cdot 40\right)=0.$$

(Felhasználtuk a számológéppel kapott eredményeket.)

Számolhatunk az átlagtól való eltérés abszolútértékével is, így az összeg már nem lenne 0. Ezt *abszolút eltérés*nek nevezzük. Az abszolútérték miatt ezt ritkán használjuk. Ha az eltérések miatt keletkezett előjelektől szeretnénk megszabadulni, úgy négyzetre is emelhetünk:

$$\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2.$$

Ezek átlaga a *variancia*.

$$\text{Variancia}=\frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n}.$$

A probléma az, hogy a négyzetre emeléssel a mértékegységeket is négyzetre kellene emelni. Ezért ezt kompenzálva négyzetgyököt kell vonunk. A kapott szám már minden szempontból kielégítő.

$$\text{Szórás}=\sqrt{\frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n}}.$$

A számológéppel kétféle szórást lehet kiszámolni: a populáció szórását (σx), illetve a minta szórását (sx). Természetesen a minta szórása nagyobb.

Visszatérve az *A* és *B* adatsokaságokhoz, láthatjuk, hogy a két szórás,

$$\sigma x\approx 29{,}06$$

és

$$\sigma y\approx 48{,}9$$

amely megerősíti azt a feltételezést, hogy a két adathalmaz nagyon is különbözik.

Megjegyzések:

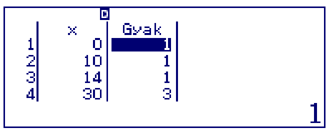
A) A hibalehetőségek miatt az adatokat gyakran átkódoljuk úgy, mint az átlagnál.

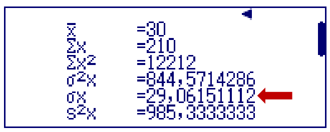
Vonjunk ki az *A* táblázat minden eleméből 10-t. Hasonlítsuk össze a szórást a korábbi értékkel!

Az új táblázat:

A:	0	10	14	30	30	30	96

Az adatok beírásánál a 0-t is vegyük figyelembe!





Az új adatsokaság szórása megegyezik a korábban kapott értékkekkel $(\approx 29{,}06)$.

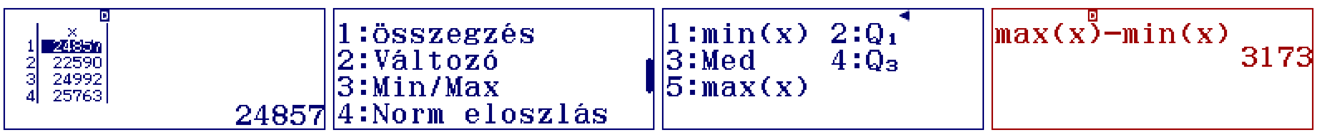
B) Megjegyezzük, hogy ha minden elemet megszorzunk egy *a* számmal, akkor a szórás is a-szorosára változik (a szórásnégyzet, azaz a variancia pedig a^2 szeresére), így csökkenthető a hibalehetőségek száma az elemek bevitelénél.

TERJEDELEM

A számológép segítségével lehetőségünk van a terjedelem kiszámítására anélkül, hogy külön begépelnénk a legnagyobb és legkisebb elemeket. Ezt akkor alkalmazzuk, ha más értékre (pl. szórás) is szükségünk van, vagy ha sok adat áll rendelkezésünkre és azokat nem rendeztük.

Megjegyzés: két változót használva a számológépbe maximum 80 értéket vihetünk be (egy változó esetében ez 160). Az adatok bevitele után használjuk az OPTN gombot, majd görgessünk lefelé, addig míg a szélsőértékek fel nem tűnnek.

Kiválasztva a kívánt szélsőértéket, könnyen képezhető a különbség. Így például a 23. feladat (63. oldal) így néz ki:



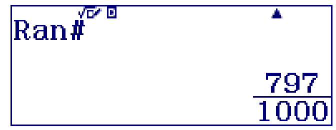
RANDOMSZÁM GENERÁTOR

A számológép segítségével véletlenszámokat is generálhatunk.

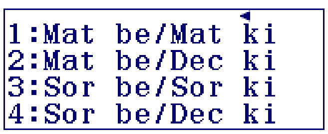
A) $(0;1)$ intervallum.

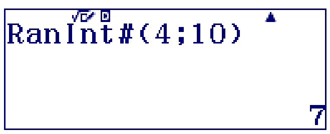
A véletlen számok három tizedesjegyre jelennek meg (ha az utolsó jegy 0, akkor csak 2)

Gomb kombináció: [SHIFT] [,] [=]–[•]



Megjegyzés: az [S⇔D] gomb megnyomásával a törtalakból tizedesszámot kapunk. Ha a megoldást eleve törtalakban szeretnénk megkapni, akkor a *Bevitel/Kiírás* módot változtassuk meg! Ha a tört alakot az írásban is használatos módon szeretnénk bevinni, akkor válasszuk a 2-es opciót *(Mat be/Dec ki).*





B) $[a;b]$ intervallumban, ahol *a* és *b* egészek.

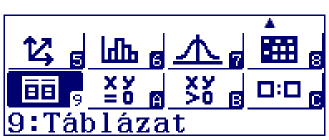
Példa: generáljunk a 4 és 10 kötözötti egész számokat.

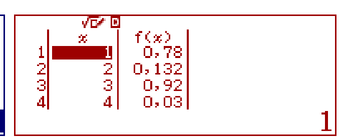
Gombkombináció: [ALPHA] [,] [4]–[SHIFT] [)] [1]–[0] [)] [=]

C) Ha több randomszámra van szükségünk, akkor táblázatot is készíthetünk.

Példa: generáljunk 6 randomszámot táblázat módban!

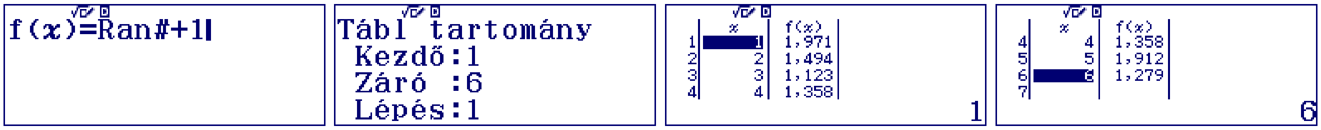
A $g(x)$ függvényhez nem irtunk semmit. Ha a *Lépés* 2, akkor csak 3 számot kapunk.





A $(0;1)$ intervallumban generált véletlenszámokkal műveleteket is végezhetünk.

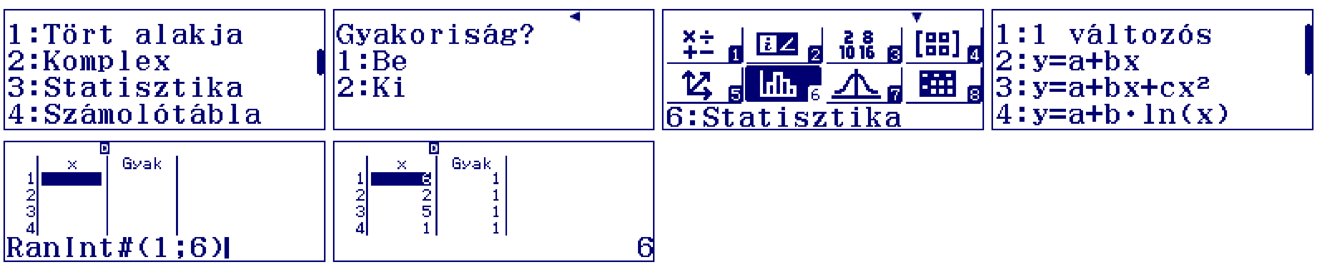
Ha pl. olyan (nem egész) számokat szeretnénk előállítani, melyek nagyobbak, mint 1, akkor ezt megtehetjük, ha 1-t adunk a Ran# parancshoz:



A generátor segítségével kockadobásokat is szimulálhatunk.

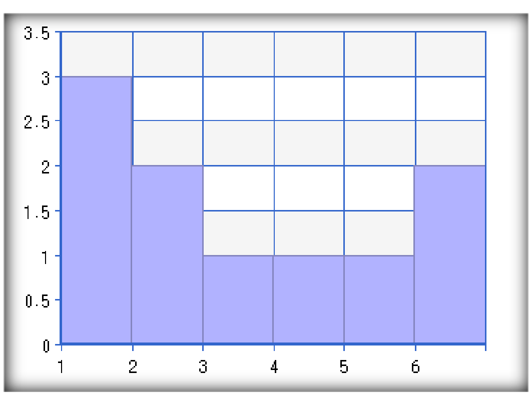
Példa: szimuláljunk 10 majd 20 kockadobást majd készítsük el a dobásokhoz tartozó hisztogramot!

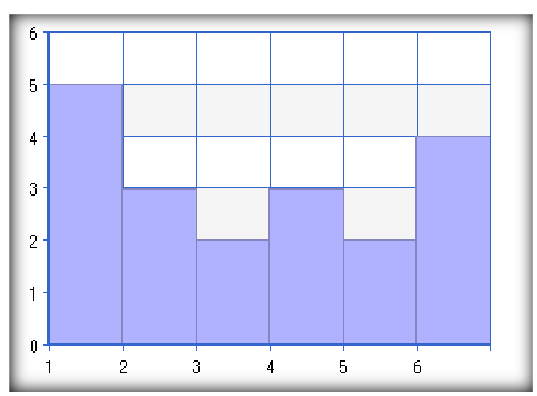
Statisztika üzemmódban dolgozunk. Aktiváljuk a *Gyakoriság*-t, majd vigyük be az adatokat!



A gyakoriságok automatikusan 1 értéket kapnak. Állítsuk elő a QR kódot és a hisztogramokat!

Megoldás:



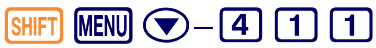


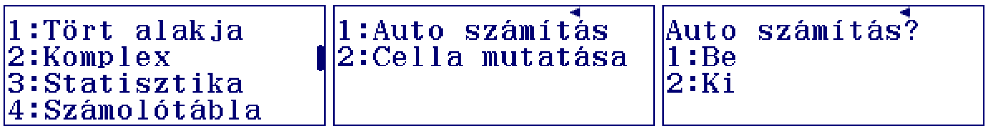
Az adatokat (véletlenszámok) a *Ranint* segítségével vittük be. Ez meglehetősen hosszadalmas. Előnye azonban, hogy segítségükkel a hisztogramok azonnal megkaphatók. Ha az adatokra jellemzőire (minimum, maximum, medián stb.) is szükségünk van, akkor használhatjuk a *Számolótábla*-t. A számológép 5 oszlopot és 45 sort tud kezelni. Ez tehát 225 adatot jelent.

29

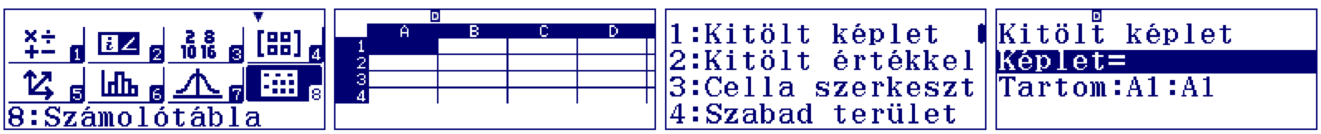
Szimuláljuk a kockadobást! Használjunk 1 oszlopot és 6 sort. Adjuk meg a dobott számok átlagát!

A táblázat elemeit képlet segítségével fogjuk bevinni. Aktiváljuk az *Auto számítás*-t:



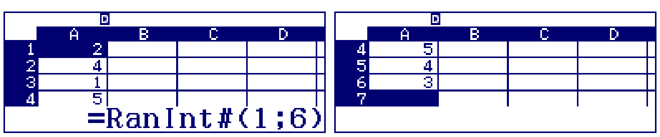


Ezt követően írjuk be a képletet! A képlet beszúrásához használjuk az OPTN gombot!



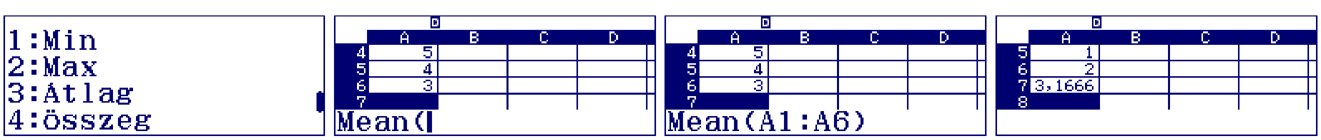
A képlet beszúrásánál, a pontosvessző (;) SHIFT).

A Tartom (=tartalom) esetében a kettőspontot (:) az ALPHA kombinációkkal vihetjük be (ha szükséges).



Az átlag kiszámításához egy üres cellába vezetjük a kurzort (az ábrán a 7. sor az *A* oszlopa megfelelő)

Mean (A1:A6)



Megoldás: a számok átlaga 3,1666.

Figyeljünk arra, hogy az átlag kiszámításánál helyesen adjuk meg a tartományokat.

VARIANCIA: KÓDOLÁS

A) A 25. feladatban a kiegészített táblázatot már nehezebb volt kezelni, még akkor is, ha több lehetőségünk volt a beírt adatok ellenőrzésére. A hiba egyik forrása lehet a számok beírása a számológépbe. Lehetőségünk van a számok nagyságát csökkenteni (növelni), anélkül, hogy ez a *Pearson*-féle korreláció értékét megváltoztatná. Az eljárást „kódolásnak" hívjuk. A két változóhoz tartozó értékeket transzformáljuk a következőképpen: $t=\frac{x-A}{B}$ és $w=\frac{y-C}{D}$ ahol A, B, C, D állandók. Bebizonyítható, hogy a *Pearson*-féle korreláció értéke ezzel nem változik. Mi határozzuk meg az állandók értékét (ezek nem függenek egymástól vagy az adatoktól).

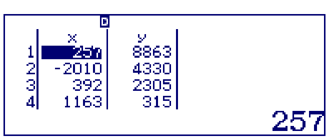
30 A 25. feladatban szereplő táblázatot felhasználva mutassuk meg, hogy a kódolás nincs hatással a korrelációs együtthatóra! Legyen $A=24\ 600$, $B,D=1$ és $C=44\ 600$.

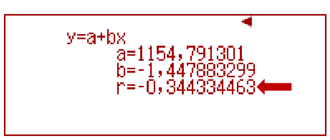
Az eredeti táblázat:

1995.	***1996.***	***1997.***	***1998.***	***1999.***	***2000.***	***2001.***
24857	22590	24992	25763	25605	23987	24391
2002.	***2003.***	***2004.***	***2005.***	***2006.***	***2007.***	***2008.***
25506	25046	24638	24804	24869	25160	25155

Az új táblázat:

1995.	***1996.***	***1997.***	***1998.***	***1999.***	***2000.***	***2001.***
257	-2010	392	1163	1005	-613	-209
8863	4330	2305	15	865	3510	-1017
2002.	***2003.***	***2004.***	***2005.***	***2006.***	***2007.***	***2008.***
906	446	38	204	269	560	555
1408	798	-809	-366	-72	-3758	-4495





Megoldás: a korreláció nem változott.

DOBOZ ÁBRA
(SODRÓFA DIAGRAM, BOX-PLOT DIAGRAM)

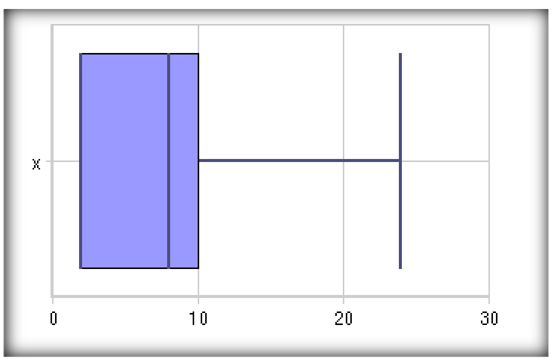
31 Vizsgáljuk meg a következő két adatsokaságot (*C* és *D*):

C	2	2	2	3	10	11	8	9	24
D	2	4	6	8	10	12	15	18	24

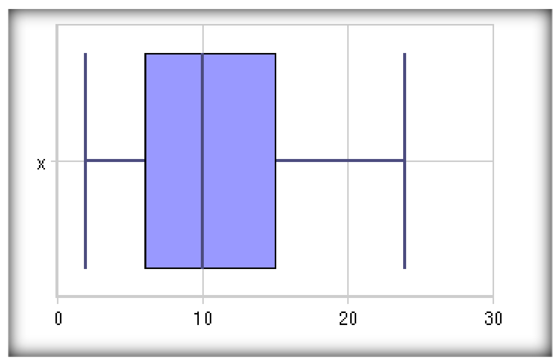
$Medián_C = 10;\ \ Medián_D = 10;\ \ Terjedelem_C = 22;\ \ Terjedelem_D = 22;$

A *C* és *D* adatsokaság mediánja ugyanaz, de a *D* adathalmaz eloszlása sokkal egyenletesebb 2 és 25 között.

Adat C



Adat D



A probléma az, hogy az adatsokaság jellemzésénél kevés elemet vettünk figyelembe. A medián esetében csak a középső elem, míg a terjedelem számításánál csak a két szélsőérték játszott szerepet.

A doboz ábra öt elemet tartalmaz:

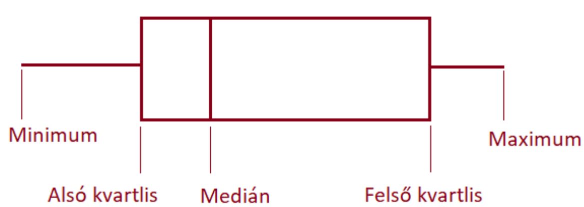
a) Minimum ($x_{\min}$)

b) Alsó kvartlis (Q_1)

c) Medián (Q_2)

d) Felső kvartlis (Q_3)

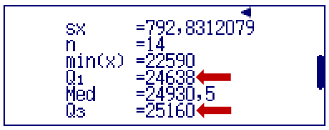
e) Maximum ($x_{\max}$)

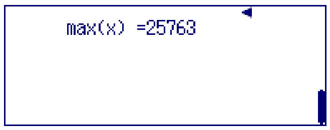


32 Határozzuk meg a 23. feladatban szereplő kiugró elemeket!

Az adatok bevitele után a számológép a Doboz Ábra értékeit rögtön megadja:

1995.	***1996.***	***1997.***	***1998.***	***1999.***	***2000.***	***2001.***
24857	22590	24992	25763	25605	23987	24391
2002.	***2003.***	***2004.***	***2005.***	***2006.***	***2007.***	***2008.***
25506	25046	24638	24804	24869	25160	25155





Látható, hogy $x_{\min} = 22590$; $Q_1 = 24638$; $Q_2 = 24930,5$; $Q_3 = 25160$; $x_{\max} = 25763$.

Az adatsokaságban szereplő kiugró elemeket a Q_1 és Q_3 értékekből számítjuk ki.

A *John Tukey* statisztikus által kifejlesztett megállapodás alapján egy lehetséges felső és alsó korlát:

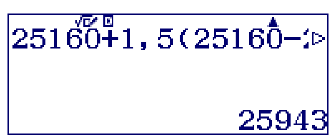
felső korlát $= Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)$ és

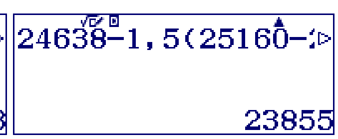
alsó korlát $= Q_1 + 1,5(Q_3 - Q_1)$.

Jelen esetben, a felső korlát 25943 és az alsó korlát: 23855. Látható, hogy az alsó korlát alatt több kiugró érték is van.

Felső korlát: 25943

Alsó korlát: 23855





Megoldás: A kiugró érték 22590.

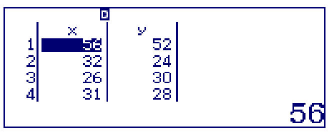
RANG KORRELÁCIÓ

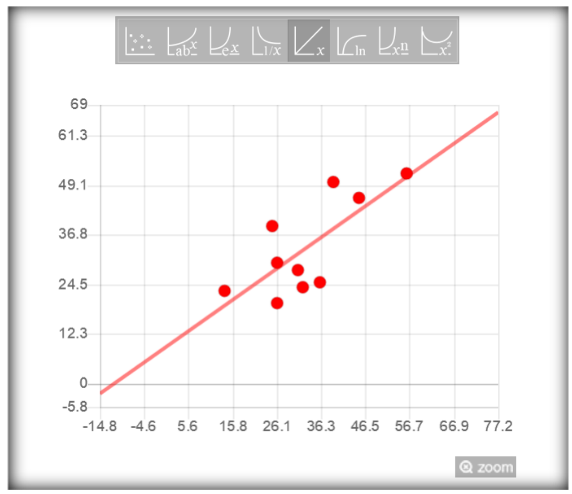
33 A következő táblázat egy osztály matematika érdemjegyét tünteti fel algebrából és geometriából. Az elérhető maximális pontszám 60.

Tanuló	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Algebra	56	32	26	31	45	36	14	39	25	26
Geometria	52	24	30	28	46	25	23	50	39	20

Rajzoljuk fel az adatokhoz tartozó szórásdiagrammot!

Írjuk be a táblázat adatait.



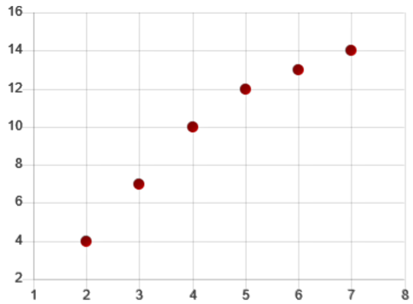


Láthatjuk, hogy azok a diákok, akik az egyik témakörből jó eredményt értek el, a másikból is jól teljesítenek. Megjegyezzük, hogy a két változóhoz tartozó korrelációs együttható $\approx 0,74$. Ez azt jelenti, hogy az adatok között pozitív korreláció van.

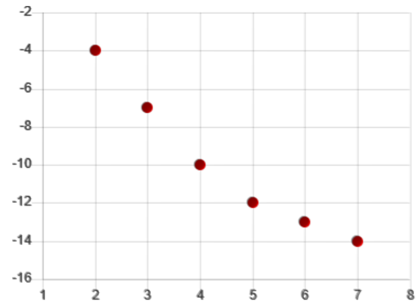
Fontos hangsúlyozni, hogy a korreláció nem azt jelenti, hogy az egyik adat változása okozza a másik változását. Tehát, ha valaki jó algebrából, nem feltétlenül jó geometriából (oda-vissza). A magas pontszámok többnyire együtt jelennek meg, de ezek nem egymástól, hanem más változóktól függenek.

Így például azok, akik vizuálisan könnyebben látják a megoldásokat, feltehetően jobbak geometriából, mint algebrából. Tehát a két változó egy harmadiktól függ. Mindenesetre a korreláció egy fajta mintát jelent az adatok elhelyezkedésében.

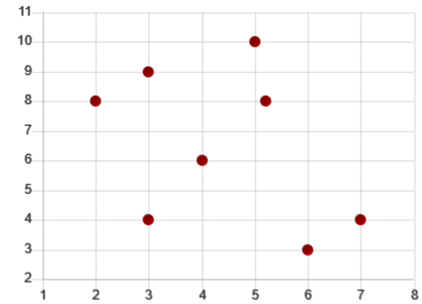
A következő diagramok az adatok közötti korrelációt szemléltetik:



Pozitív korreláció



Negatív korreláció



Zéró korreláció

(Az ábrákat QR kód segítségével generáltuk.)

A korreláció mértékét a pontok viszonyából következtetjük. Ha a két változóból álló adatok sorrendje is fontos akkor a korrelációt az úgynevezett rangkorrelációval mérjük.

Megjegyzés: A rangkorrelációt másképpen *Spearman*-féle rangkorrelációnak is nevezzük.

34 Egy csokoládé forgalmazó cég felmérést készít. A felmérés során 8-féle csokoládét szeretne tesztelni (a csokoládékat *A*-tól *H*-ig jelöltük). Két azonos korú diákot (Judit és Hedvig) kért meg a teszteléshez. Az eredményeket táblázatba foglaltuk:

Judit	D	C	G	B	A	E	F	H
Hedvig	C	D	B	G	H	E	A	F

Adjuk meg a rangkorreláció mértéket a táblázat alapján!

Judit esetében a *D* a legfinomabb csokoládé ezért került az első oszlopba és rendeltük hozzá az 1-t, míg Hedvig a *C* csokoládét tartja a legjobbnak. Készítsünk egy táblázatot:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Judit	D	C	G	B	A	E	F	H
Hedvig	C	D	B	G	H	E	A	F

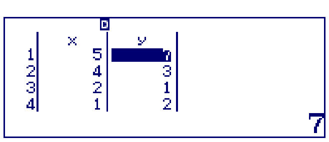
Áttekinthetőbb, ha a következő táblázattal dolgozunk:

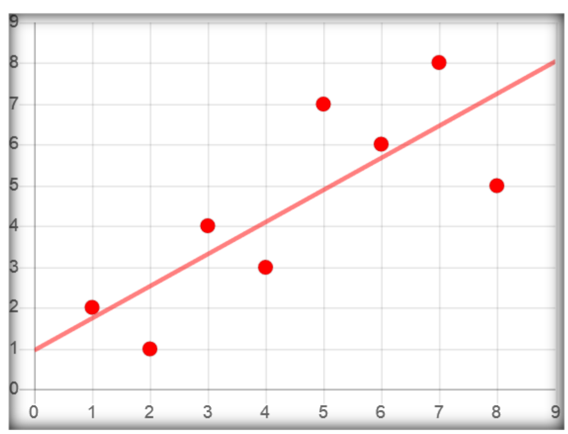
	Judit	Hedvig
A	5	7
B	4	3
C	2	1
D	1	2
E	6	6
F	7	8
G	3	4
H	8	5

A táblázatból kitűnik, hogy a két lány ugyan nem ért egyet a csokoládék sorrendjében, de a finom csokoládék mind a két esetben nagyjából ugyanolyan pontot kaptak.

Ha a tesztelést másokkal végeztetnénk el, akkor hasonló eredményeket várnánk. A felmérés azonban szubjektív, ezért a hagyományos korreláció itt nem alkalmazható.

Ha azonban a sorrend megvan, akkor a korrelációhoz tartozó pontdiagram már jól mutatja az adatok közötti viszonyt: A két vélemény közötti pozitív korreláció szemmel látható.





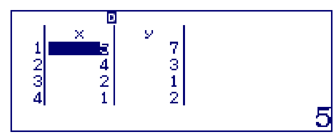
A *PEARSON*-FÉLE KORRELÁCIÓS EGYÜTTHATÓ

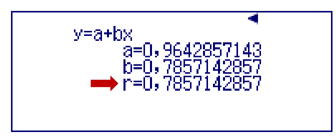
A számológép segítségével a *Pearson*-féle korrelációs együtthatót (r) tudjuk kiszámolni. Ez a szám -1 és 1 között bármilyen értéket felvehet. A plusz 1 azt jelenti, hogy az adatok egy pozitív meredekségű egyenesen helyezkednek el, míg a -1 egy negatív meredekségű egyenest jelent (a pontok az egyenesen helyezkednek el ez esetben is). Ez esetben az adatok közötti kapcsolat jellege fordított arányosság. A 0 azt jelenti, hogy az adatok között nincs lineáris korreláció. Hangsúlyozzuk, hogy ha az adatok közötti korreláció nulla, az nem azt jelenti, hogy nincs közöttük kapcsolat, hiszen előfordulhat, hogy az adatok jobban illeszkednek egy parabolára, mint egy egyenesre. Ebben az esetben parabolikus regresszióról beszélünk (nem pedig lineárisról).

A *Pearson*-féle korrelációs együttható tehát az adatok közötti lineáris kapcsolat szorosságát méri.

Adjuk meg az előző feladatban szereplő korrelációs együttható értékét!

Megoldás: a *Pearson*-féle rangkorreláció értéke $r \approx 0,78$





A korreláció értéke és a változók közötti kapcsolatot minőségét a következő táblázattal szemléltetjük:

Korrelációs együttható értéke	Változók közötti kapcsolat
0,9 - 1	Rendkívül szoros
0,75 - 0,9	szoros
0,5 - 0,75	érzékelhető
0,25 - 0,5	laza
0,0 - 0,25	Nincs kapcsolat

A LINEÁRIS REGRESSZIÓHOZ TARTOZÓ EGYENES

Legyen

$$\bar{x} = az\ x\ változóhoz\ tartozó\ számok\ átlaga$$
$$\bar{y} = az\ y\ változóhoz\ tartozó\ számok\ átlaga$$

$$S_{xy} = \sum\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right) = \sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \sum y_i$$
$$S_{xx} = \sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2$$

A lineáris regresszióhoz tartozó egyenes egyenlete, ha az x a független változó, y pedig a függő:

$$y = a + bx$$

ahol $b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ és $\bar{a} = \bar{y} - b\bar{x}$.

$\Big($*A* lineáris regresszió egyenese átmegy az $\left(\bar{x}; \bar{y}\right)$ pontokon$\Big)$.

A fenti képletek tájékoztató jellegűek, hiszen a számológép rögtön megadja az a, b és r értékeket. Megjegyezzük, hogy a számológép a képletben szereplő szummációs összegeket is megadja.

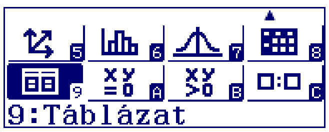
TOVÁBBI FELADATOK

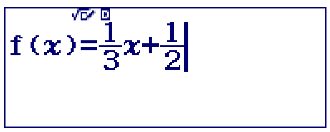
35 A derékszögű koordináta-rendszerben adott egy téglalap, amelynek csúcsai: $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;1)$ és $D(0;1)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a téglalap egy belső $P(x;y)$ pontját. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $y \le \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$?

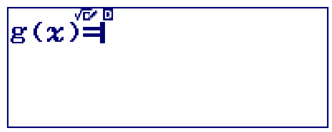
Váltsuk át a számológépet *Táblázat* módba, majd írjuk be az $f(x)$ függvény helyére az egyenlőtlenség jobb oldalát.

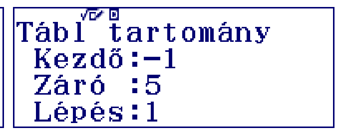
A $g(x)$ függvényhez ne írjunk semmit.

A *Kezdő* értéket -1-re változtattuk.





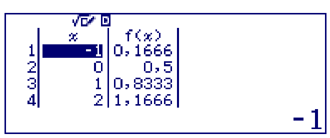


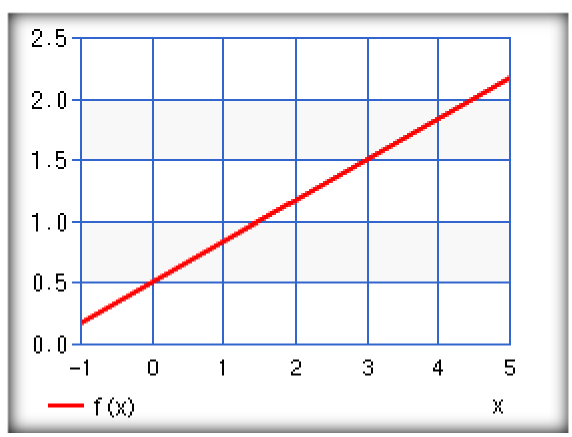


A függvény képéhez a QR kód segítségével jutunk. Nyomjuk meg a SHIFT OPTN gombokat.

A Kezdő értéket azért változtattuk -1-re, mert így jobban látható, hogy a függvényérték az $x=0$ pontban $\frac{1}{2}$.

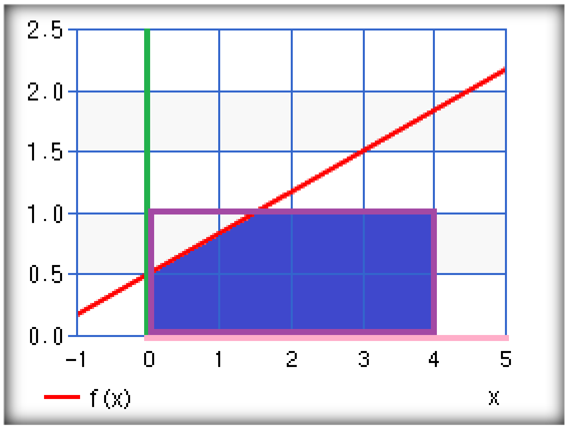
Rajzoljuk meg a koordináta-rendszer tengelyeit és a feladatban szereplő téglalapot.





Az $y \le \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ feltételnek megfelelő tartomány téglalapba eső részét kékkel színeztük be.

A valószínűséget a területtel fogjuk mérni. Legyen A az az esemény, hogy a kiválasztott pont a téglalapba esik és $y \le \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$.



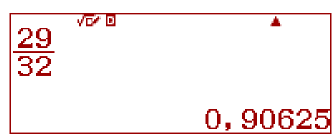
A véletlenszerűen választott $P(x;y)$ pont bárhol lehet a téglalapon belül, így a téglalap területe lesz az összes eset száma.

$T_{téglalap} = 4 \cdot 1 = 4$ [egység].

A kedvező esetek a téglalap kékkel jelölt részét jelentik. Ez egy trapéz. Ennek területét megkapjuk, ha a téglalap területéből kivonjuk a bal felső sarokban keletkezett derékszögű háromszög területét.

$$T_{trapéz} = T_{téglalap} - T_{derékszögű\ háromszög} = 4 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{29}{8} \text{ [egység]}$$

(a derékszögű háromszög x-tengellyel párhuzamos oldalának hosszát az $y = 1$ és $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ egyenesek metszéspontjából kaptuk).



Megoldás: a keresett valószínűség: $P(A) = \frac{\frac{29}{8}}{4} = \frac{29}{32}$ $(\approx 90{,}62\%)$.

36 Marci a farsangi rendezvényre kibocsátott 200 darab tombolajegyből 4-etvásárolt. A tombolán 10 nyereménytárgyat sorsolnak ki. Minden tombolajeggyel legfeljebb egy tárgyat lehet nyerni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Marci pontosan egy tárgyat nyer a tombolán?

A négy tombolajegy bármelyike lehet nyerő. Ha kiválasztunk egy nyerő tombolát, akkor a maradék 3 „nem nyerő" kell, hogy legyen.

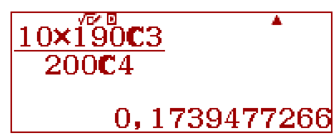
A 200 tombolából Marci számára 4-et kell kiválasztani. Ebben lehetnek nyerő és nem nyerő tombolák is. A számuk az összes eset számát adja: $n = \binom{200}{4}$.

A 10 nyerő tombolából 1-et 10 féleképpen lehet kiválasztani $\left(\text{vagy } \binom{10}{1}\right)$.

A maradék három nem nyerő szelvényt a 190 tombolából kell kiválasztani: $\binom{190}{3}$.

Mindegyik nyerőhöz három nem nyerő tartozik, úgy, hogy a sorrend nem fontos.

A kedvező esetek száma tehát: $k = \binom{190}{3}\binom{10}{1}$.



Megoldás: $P(\textit{Marci pontosan egy tárgyat nyer a tombolán}) = \dfrac{10 \cdot \binom{190}{3}}{\binom{200}{4}} \approx 17{,}39\%.$

37

Marci a farsangi rendezvényre kibocsátott 200 darab tombolajegyből 4-etvásárolt. A tombolán 10 nyereménytárgyat sorsolnak ki. Minden tombolajeggyel legfeljebb egy tárgyat lehet nyerni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Marci nyer a tombolán?

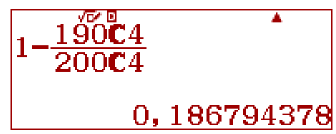
Marci vagy nyer, vagy nem nyer a tombolán. A két esemény egymást kizárja. Ezért

$P(\textit{Marci nyer a tombolán}) = 1 - P(\textit{nem nyer})$.

Az összes eset száma: $\binom{200}{4}$.

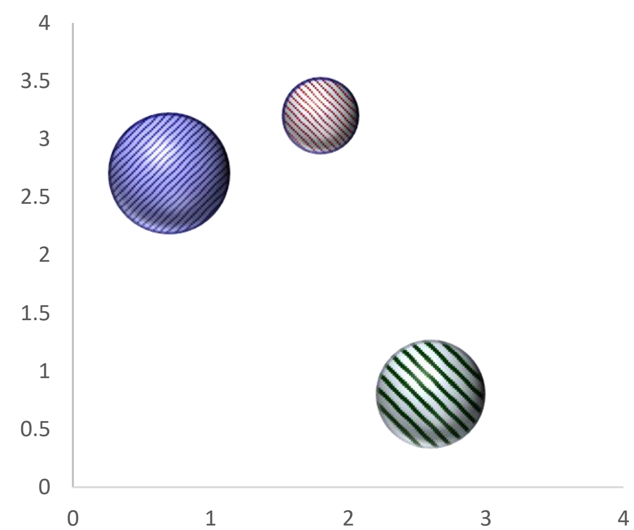
Kedvező az, ha Marci mind a négy alkalommal a 190 nem nyerő tombolát kapja.

Ezek száma a kedvező eset száma: $\binom{190}{4}$.

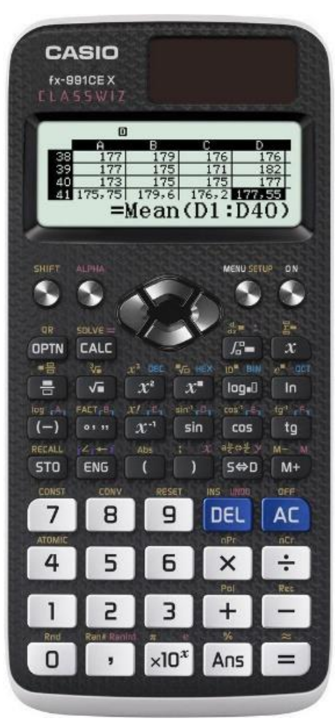


Megoldás: $P(\textit{Marci nem nyer a tombolán}) = 1 - \dfrac{\binom{190}{4}}{\binom{200}{4}} \approx 18,7\%$

ANALÍZIS



CASIO FX-991CE X



A TÉMAKÖRÖK LISTÁJA

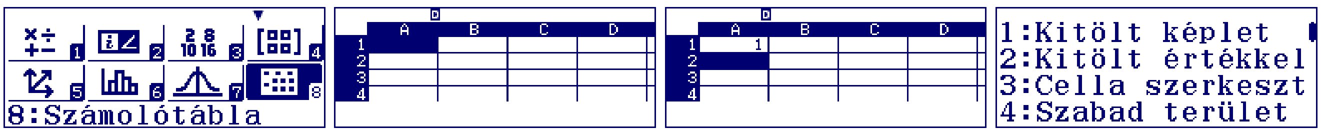
SOROZAT MEGADÁSA ÉS ÁBRÁZOLÁSA

A sorozat elemeinek megadása

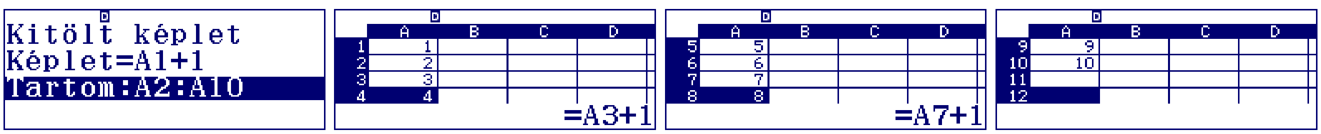
38 Határozzuk meg az $a_n = 2n + 1$ sorozat néhány elemét!

Első megoldás

Adjuk meg a sorozat indexeit. Tekintsük az első 10 elemet! Az A1 cella kezdő értéke legyen 1. Ezt követően definiáljuk a hozzárendelési utasítást, amely alapján a program a következő index elemet generálja. Ehhez nyomjuk meg az OPTN gombot.



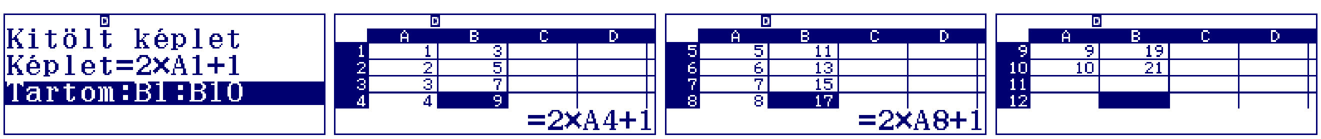
Válasszuk a *'Kitöltött képlet'*-et, majd utasításként írjunk A1+1-et.



A sorozat elemei úgy keletkeznek, hogy az A1 cella első elemét (1) megszorozzuk 2-vel, majd hozzáadunk 1-t: 2A1+1.

A tartomány ('*Tartom*') A2:A10 (a legutolsó cella A10).

A program (az A oszlop elemeihez viszonyítva) kiszámolja a sorozat elemeit.



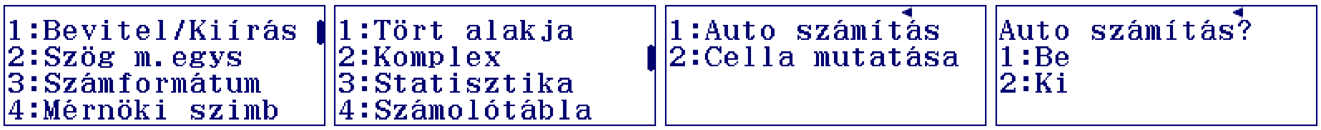
Megoldás: $a_1 = 3$; $a_2 = 5$ és így tovább (lást a fenti képeket)

A számolótábla-mód lehetőséget ad arra, hogy a beírt adatok néhány jellemzőit (pl. átlag) rögtön megkapjuk.

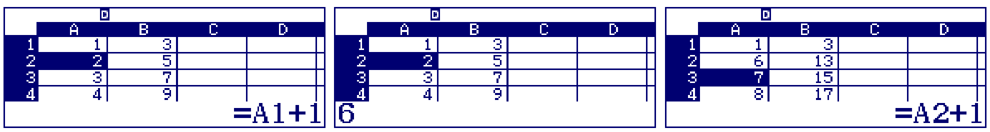
Megjegyzés: az automatikus kitöltéshez aktiváljuk az *’Auto számítást’*:

SHIFT MENU ▼ – 4 1 1

Erre akkor van szükség, ha az elemekre alkalmazott képletet nem szeretnénk minden alkalommal beírni, ha egy elem megváltozik valamelyik cellában.



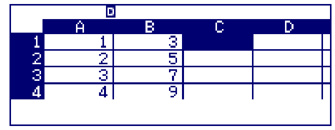
Változtassuk meg a 2. elemet 2-ről 6-ra. Látjuk, hogy a táblázat elemei ennek megfelelően változnak.



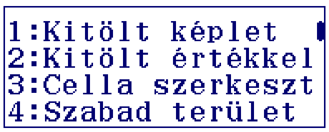
39

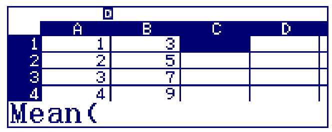
Határozzuk meg az előbbi sorozat első négy elemének számtani közepét úgy, hogy az eredmény a C1-es cellában jelenjen meg!

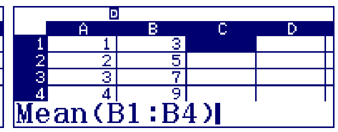
Mozgassuk a kurzort a C1-es cellába!

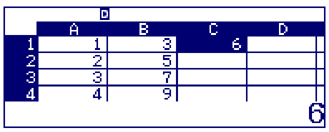


Nyomjuk meg az OPTN gombot, majd nyomjuk az addig, amíg az *'Mean' (Átlag)* nem jelenik meg.



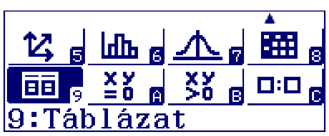


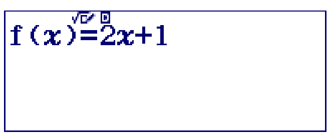


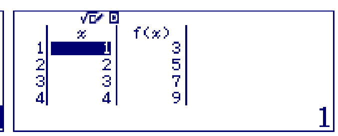


Megoldás: a számok átlaga 6.

Megjegyezzük, hogy a sorozat elemei *Táblázat* módban is megadhatók.





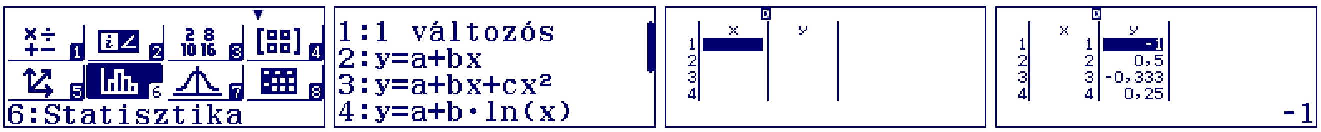


A sorozat ábrázolása

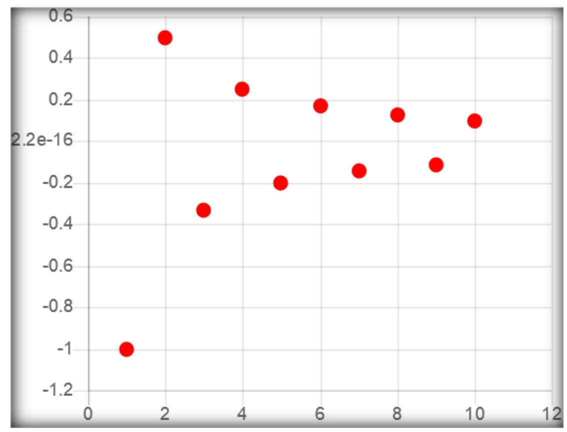
40

Ábrázoljuk az $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ sorozat elemeit!

Vigyük be az adatokat *Statisztika* módban! (Tekintsük a sorozat első 10 elemét)



Jól látható, hogy $\lim\limits_{x \to n} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$



SPECIÁLIS SOROZATOK (SZÁMTANI, MÉRTANI)

A. számtani sorozat

A számtani sorozat általános tagja: $a_n = a_1 + (n-1)d$

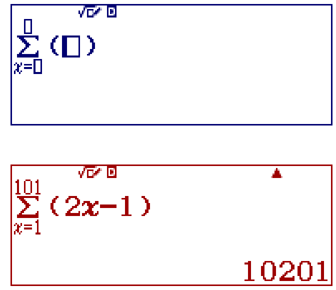
Az első *n* elemének összege: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

41

Határozzuk meg az $1+3+...+201$ összeget!

Első módszer

Aktiváljuk a szumma jelet a SHIFT x gombokkal!



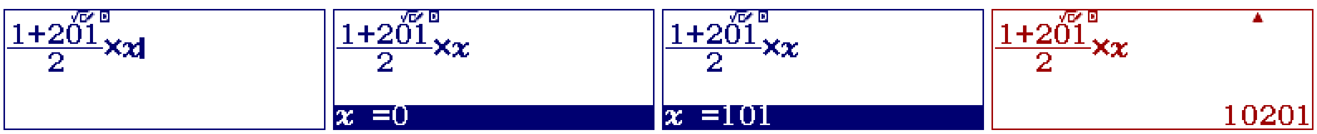
A sorozat általános tagja $a_n = 1+(n-1)\cdot 2 = 2n-1$

Második módszer

Használjuk az S_n -re vonatkozó képletet!

Nyomjuk meg a CALC gombot, majd adjuk meg az x (n) értékét!

Az $x=0$ értékét változtassuk 101-re!

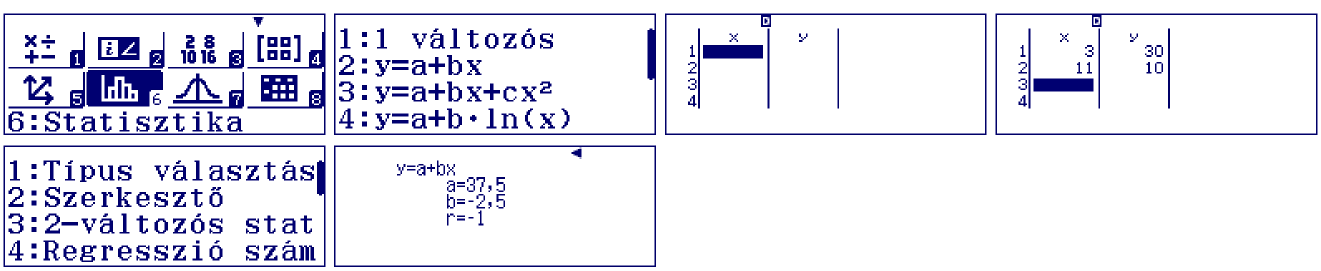


Megoldás: az 1, 3, 5,…,201 elemek összege 10201.

42

Egy számtani sorozat harmadik tagja 30, tizenegyedik tagja 10. Mennyi a sorozat első eleme és különbsége?

Statisztika üzemmódban dolgozunk. Válasszuk a 2-es opciót ($y=a+bx$) ezt követően a 4-est *(Regresszió szám)*



Azt kaptuk, hogy $y=-2{,}5x+37{,}5=35+(x-1)\cdot(-2{,}5)$

Megoldás: a sorozat első elem $a_1=35$ és differenciája $d=-2{,}5$.

B. Mértani sorozat

A sorozat általános tagja

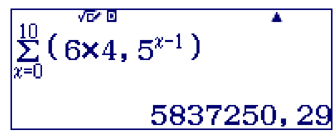
$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

és első n elemének összege:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

43 Egy mértani sorozat első eleme 6, hányadosa 4,5. Mennyi a sorozat első 10 tagjának összege?

A sorozat első 10 tagjának összege 5837250,29.



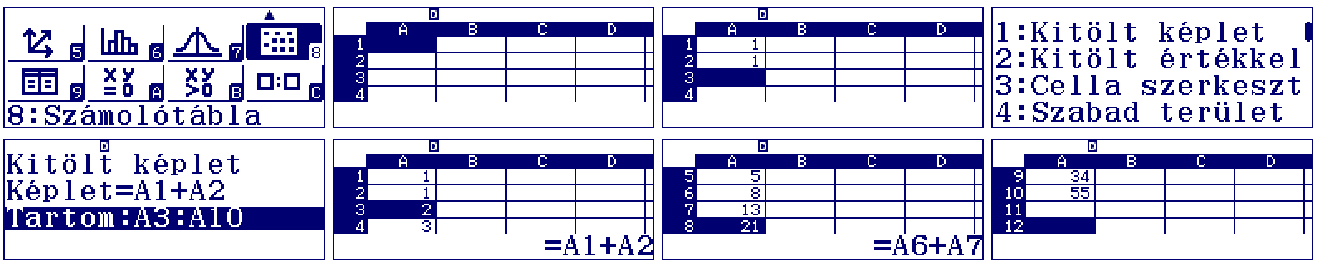
FIBONACCI-SOROZAT

A sorozat elemei:

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ \ldots, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Adjuk meg az első 10 elemet!

Írjuk be az első két cellához tartozó értékeket: 1 és 1. Ezt követően a képletet és a tartományt.



Megoldás:

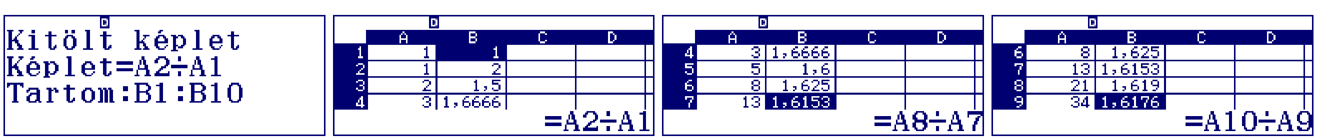
$a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_3 = 2;\ a_4 = 3; \ldots; a_{10} = 55.$

Megjegyzés:

Tekintsük egy másik sorozatot, q_n-t. Ez a sorozat a Fibonacci sorozat egymást követő elemeinek hányadosiból áll. Azaz,

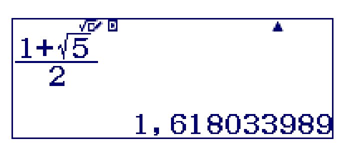
$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots$$

A fenti sorozat vizsgálatához használjuk a számológépet!



A megfelelő hányadosok: 1; 2; 1,5…

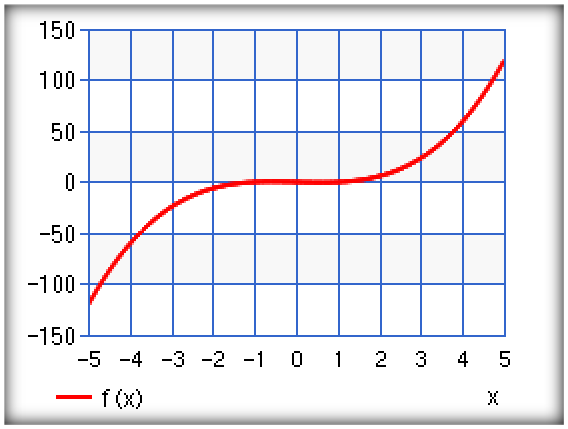
A hányadosokból képzett sorozat határértéke $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



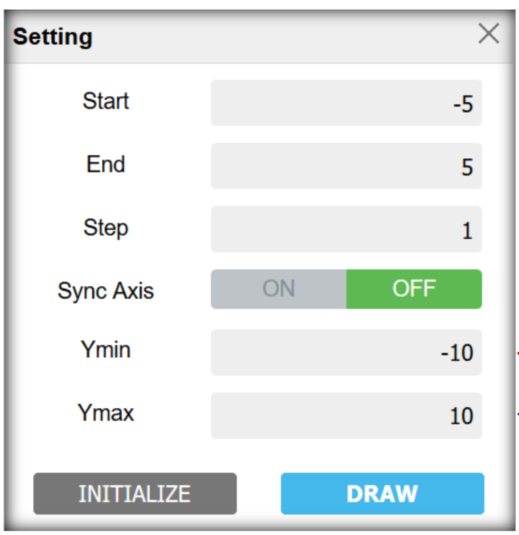
FÜGGVÉNYÁBRÁZOLÁS

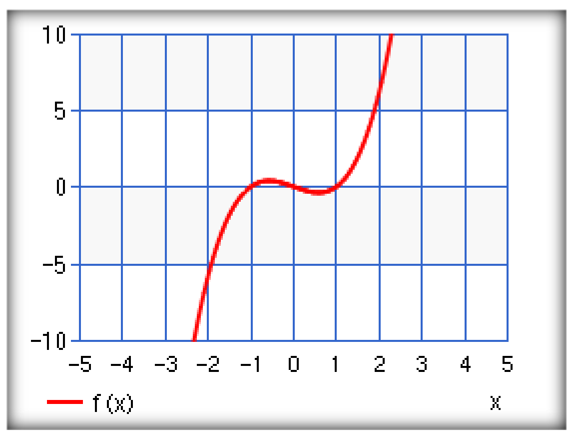
44 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett $f\left(x\right)=x^{3}-x$ függvényt!

A függvényképe alapján a zérushelyeket nem tudjuk megkülönböztetni.



Változtassuk meg a határokat! Némi próbálkozás után a **Kezdő**, az **Záró** és a **Lépés** értékek a következők:



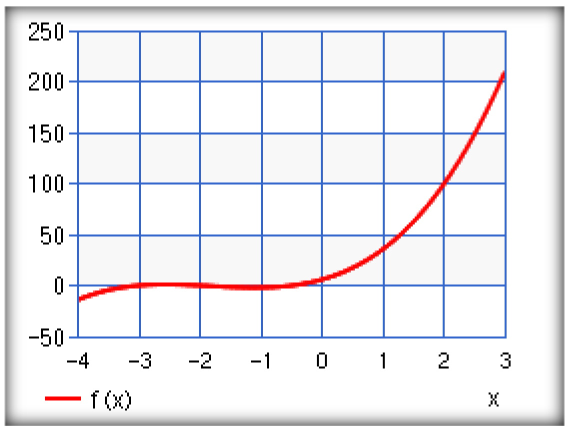


EGYENLETEK MEGOLDÁSA FÜGGVÉNYEKKEL

45

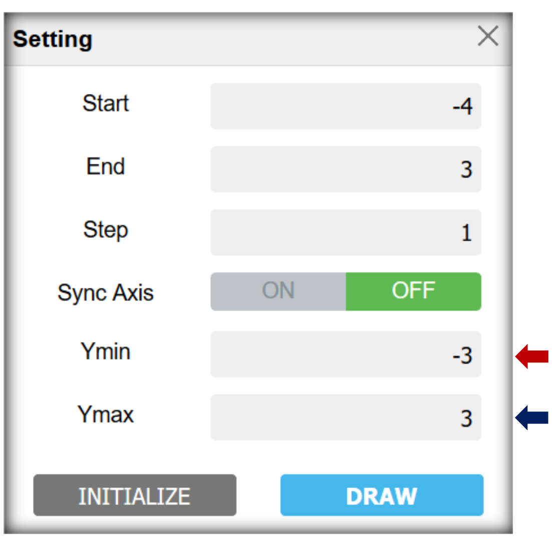
Oldjuk meg az $2x^3+11x^2+17x+6=0$ egyenletet!

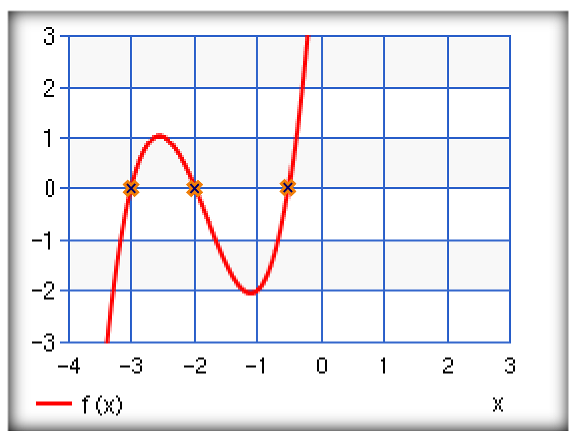
Látjuk, hogy a függvény grafikonja nem elég tiszta ahhoz, hogy a zérushelyeket megkülönböztessük.



Változtassuk meg az $y_{\min}$ és $y_{\max}$ értékeket!

Ezt követően az új határok és a grafikon:





Megoldás: $x=-3;\ -2;\ -0,5;.$

FÜGGVÉNYHATÁRÉRTÉK VÉGES PONTBAN

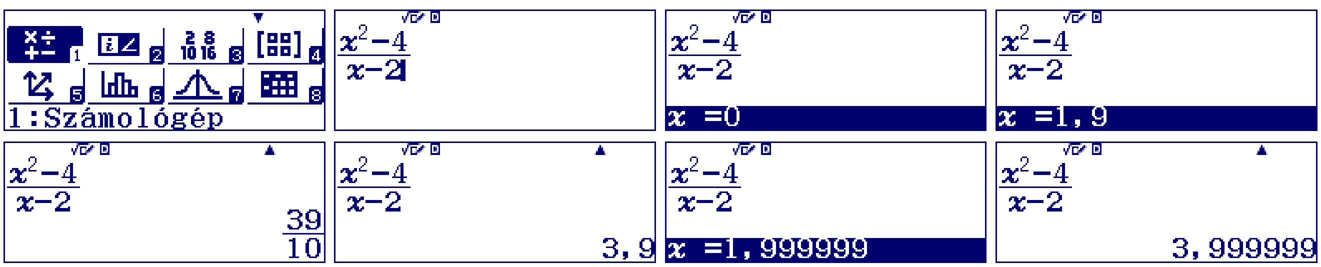
46 Sejtsük meg a $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ határértéket!

Vizsgáljuk meg az $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ $(x\neq 2)$ függvényt!

Első módszer

Írjuk be a kifejezést *’Számológép’* módban. Ezt követően nyomjuk meg a CALC gombot. A program az *x* értékét kéri.

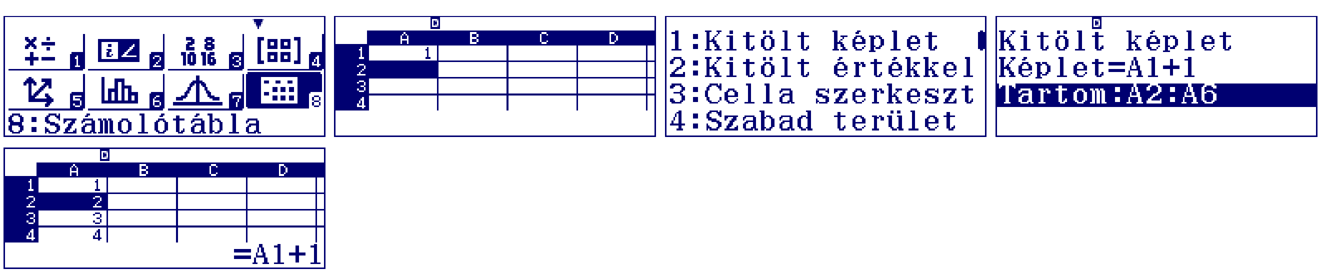
Legyen az *x* értéke 1,9 majd 1,999999 (6 darab 9-es). Az S⇔D gomb segítségével a tört alakból tizedes számot készíthetünk.



Ezek alapján $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

Második módszer:

Írjuk be a kifejezést *’Számolótábla’* módban. A kezdő érték legyen 1. Tekintsük az első 6 tagot. Az indexek generálása után vigyük át a kurzort a B1-es cellába. A közelítő értékek: 1,9; 1,99; 1,999; … ;1,999999 (6 darab 9-es).



Természetesen nem kell beírnunk az egyes értékeket. Az elemek generálásában segít a következő ötlet:

$$0{,}9 = 9 \cdot \frac{1}{10}$$

$$0{,}99 = 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} \right).$$

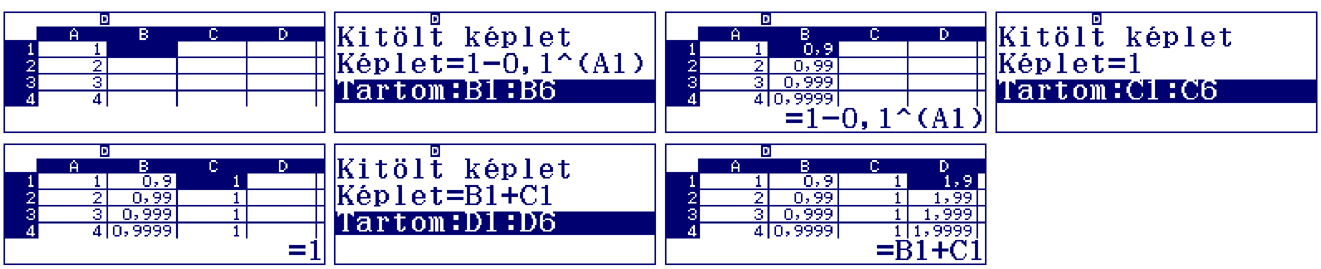
Általában:

$$0{,}9\ldots9 = 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^n} \right) = 9 \cdot \left[\left(\frac{1}{10} \right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{10} \right)^n - 1}{\frac{1}{10} - 1} \right] = -1 \cdot \left(0{,}1^n - 1 \right) = 1 - 0{,}1^n$$

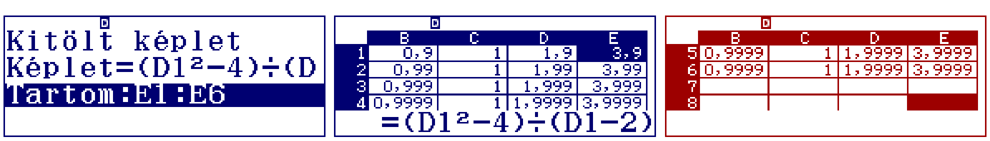
Ezt követően a B oszlop elemei a 0,9; 0,99;…;0,999999.

A képlet: 1-0,1^(A1).

A C oszlophoz az 1 értéket rendeljük hozzá, majd adjuk össze a B és C oszlopokat.



Most, hogy a D oszlop elemeit megkaptuk, írjuk be az *x* helyére az egyes értékeket. A hozzárendelési szabály: (D1^2-4)$\div$(D1-2).



Megjegyezzük, hogy némi gyakorlás után a fenti műveletsor rövid idő alatt kivitelezhető.

A POLÁRKOORDINÁTA-RENDSZER

47

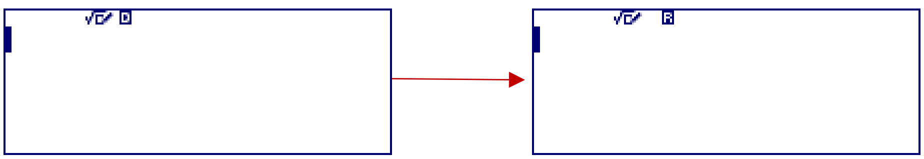
Konvertáljuk a következő pontokat az adott koordináta-rendszerre.

a. $\left(2;\dfrac{2\pi}{3}\right)$ derékszögű koordináta-rendszerre

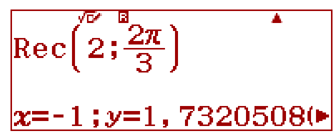
b. $\left(2;-\dfrac{\pi}{3}\right)$ derékszögű koordináta-rendszerre

c. $(-1;1)$ polárkoordináta rendszerre.

Változtassuk a szögegységet radiánra.

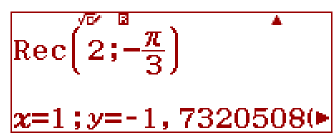


a. 



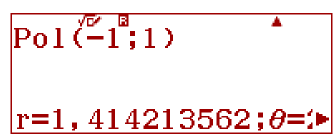
$$\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)\longrightarrow(-1;\ 1{,}73...)$$

b.



$$\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)\longrightarrow(1;\ -1{,}73...)$$

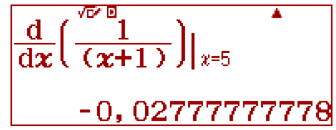
c. 



$$(-1;1)\longrightarrow(1{,}41...;\ 2{,}35...)$$

FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA ADOTT PONTBAN

48 Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ függvény deriváltját az $x=5$ pontban!



Megoldás: a függvény deriváltja az $x=5$ helyen $\approx -0{,}03$

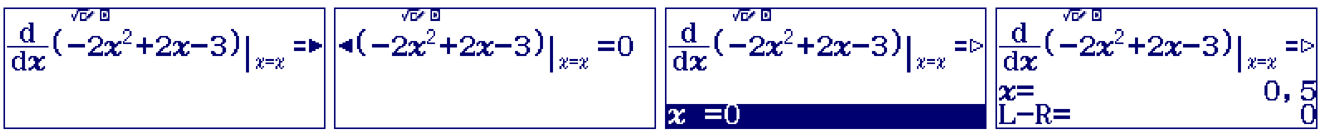
$f'(x)=0$ FELTÉTEL MEGOLDÁSA

Az $f'(x)=0$ feltétel azt jelenti, hogy keressük azokat az x értékeket, melyre az egyenlőség teljesül. Éppen ezért a számolás során az egyenletmegoldó funkciót használjuk.

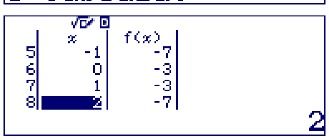
Ezt a módot a SHIFT CALC gombokkal aktiválhatunk.

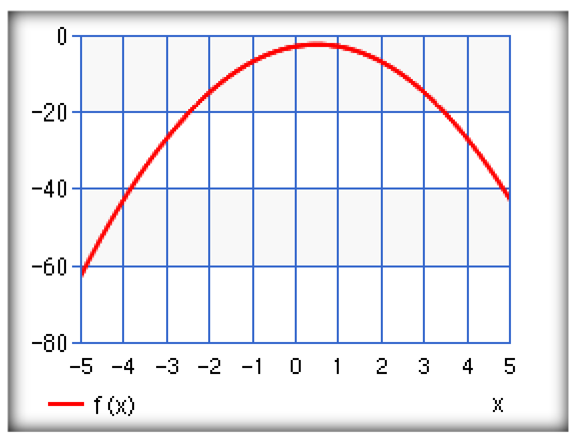
49 Határozzuk meg a következő hozzárendeléssel megadott parabola maximumának értékét: $f(x)=-2x^2+2x-3$.

Először oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet:

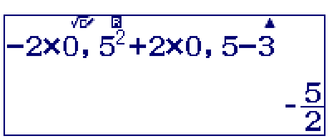


A megoldás $x=0,5$. A függvény képe:





A függvényérték az pontban $-\frac{5}{2}$:



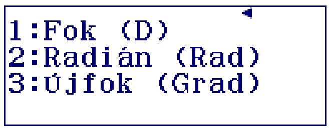
Megjegyzés: látható, hogy az egyenes meredeksége előjelet vált az $x=0,5$ ponthoz képest balra és jobbra lévő helyeken.

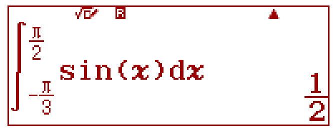
Megoldás: a parabola maximumának értéke: $-\frac{5}{2}$.

HATÁROZOTT INTEGRÁL

50 Határozzuk meg a következő integrál értékét: $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$!

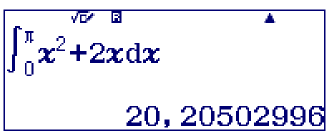
A számológépet váltsuk át *rad* üzemmódba! (ha *deg*-ben dolgozunk, akkor az eredmény 0. Ugyanakkor számítás közben is tudunk váltani a SHIFT MENU gombkombinációval.)

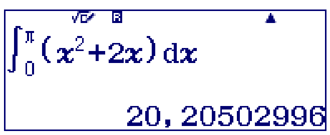




Megoldás: $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{1}{2}$

Megjegyezzük, hogy a zárójel nem szükséges.





FELADATOK

Több részletben összesen 350 tonna árut szeretnénk vasúton elszállíttatni. Az egyik
szállítócég árajánlatában a szállítási díj két összetevőből áll. Egyrészt a szállított árú
tömegének négyzetével arányos díjat kell fizetnünk, másrészt az áru tömegétől független
51 állandó alapdíjat is felszámítanak: ha egyszerre t tonna áru elszállítását rendeljük meg,
akkor ezért $\frac{t^2}{10}+205$ eurót kell fizetnünk. Igazolja, hogy ha két részletben (két
alkalommal) szállíttatnánk el a 350 tonna árut, akkor a vasúti költség abban az esetben
lenne a legkisebb, ha az árut két egyenlő tömegű részre osztanánk!

A szállítási költség összege a tömeg függvényében $\frac{t^2}{10}+205$ [Euró].

A 350 tonna árut bontsuk fel két részre:

x és $350-x$.

A két résznek megfelelő szállítási költségek:

$$\frac{x^2}{10}+205 \quad \text{és} \quad \frac{(350-x)^2}{10}+205$$

Ezek összege a teljes szállítási díj. Jelöljük ezt a függvényt $A(x)$-szel.

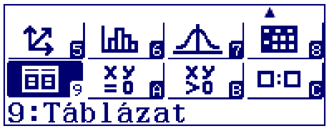
$$A(x)=\frac{x^2}{10}+205+\frac{(350-x)^2}{10}+205=\frac{x^2+(350-x)^2}{10}+410.$$

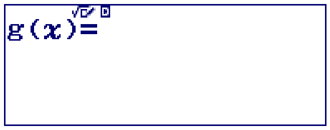
Az $A(x)$ függvény minimumát keressük.

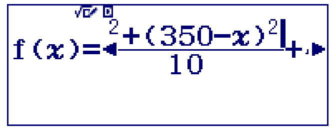
Megjegyzés: mi az $A(x)$ függvény értelmezési tartománya?

Vigyük be a függvényt a számológépbe!

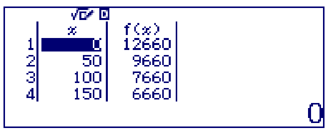
A **Kezdő**, az **Záró** és a **Lépés** értékek rendre 0, 300 és 50.

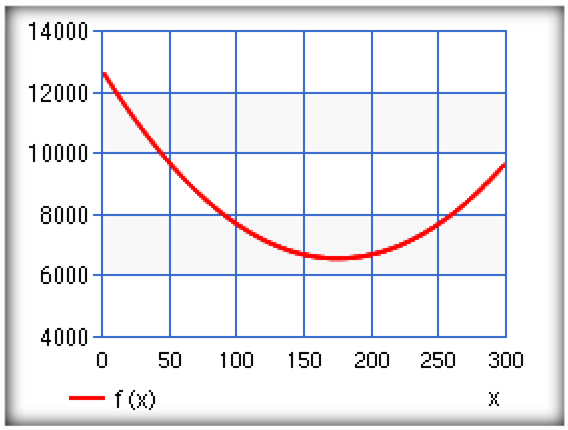






Látható, hogy a függvény legkisebb értéke valóban 175 körül mozog.



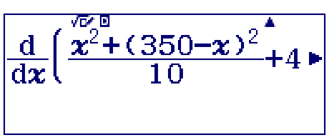


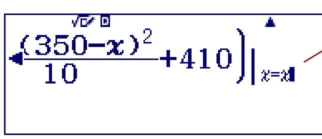
Természetesen ezt igazolnunk is kell. Ha megtaláljuk azt a pontot, ahol az $A(x)$ függvény deriváltja 0 $\left(A'(x)=0\right)$, akkor minimum esetében az ettől a ponttól balra, illetve jobbra eső egyenes meredekségének előjele rendre negatív, illetve pozitív kell, hogy legyen.

Adjuk meg a függvény deriváltját egy x pontban majd oldjuk meg az $A'(x)=0$ egyenletet.

A függvény deriváltját a SHIFT billentyű kombinációval vihető be $\left(\frac{d}{dx}(\square)\ \Big|_{x=\square}\right)$.

$x=x$-et írtunk az adott ponthoz tartozó deriválthoz!



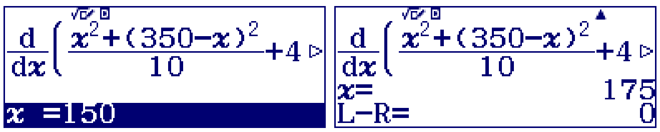


Oldjuk meg a $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+(350-x)^2}{10}+410\right)\ \Big|_{x=x}=0$ egyenletet!

Az egyenletmegoldáshoz a SHIFT CALC gombokat nyomjuk meg.

Adjunk meg egy, a feltételezett megoldáshoz közeli értéket!

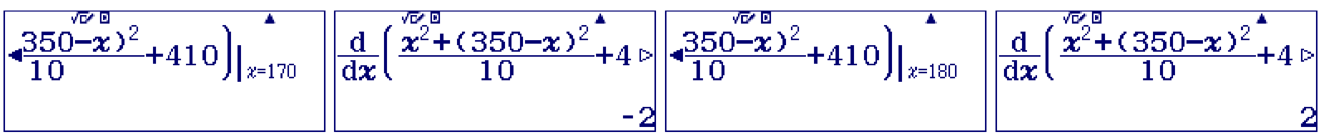
Legyen ez $x=150$!



Azt kaptuk, hogy az $x=175$ pontban a függvény deriváltja 0.

Nézzük az előjelváltásokat!

Mozgassuk a kurzort az $x=x$ pontig, majd írjunk 170-et, illetve 180-at a jobb oldali x helyébe.



Az előjelek tehát azt mutatják, hogy az $x=175$ pontban a függvénynek minimuma van.

52 A vasúti szállítás költségének csökkentése érdekében a 350 tonna tömegű árut n egyenlő részre osztjuk, és azt tervezzük, hogy minden egyes alkalommal egy-egy részt szállíttatunk el a vasúttal $\left(n \in \mathbf{N}^{+}\right)$. Igazolja, hogy a szállítócég ajánlata szerint az n alkalommal történő vasúti szállítás költsége összesen $\frac{12250}{n} + 205n$ Euró lenne!

Az egyenlő részek tömege $\frac{350}{n}$.

A költségek:

$$\left(\frac{\left(\frac{350}{n}\right)^2}{10} + 205\right) + \left(\frac{\left(\frac{350}{n} \cdot 2\right)^2}{10} + 205\right) + \left(\frac{\left(\frac{350}{n} \cdot 3\right)^2}{10} + 205\right) + \ldots + \left(\frac{\left(\frac{350}{n} \cdot n\right)^2}{10} + 205\right) =$$

$$= \frac{\left(\frac{350}{n}\right)^2 \cdot n}{10} + n \cdot 205 = \frac{122500}{10n} + n \cdot 205 = \frac{12250}{n} + n \cdot 205.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az n alkalommal történő vasúti szállítás költsége összesen

$\frac{12250}{n} + 205n.$

53 A vasúti szállítás költségén kívül figyelembe kell vennünk azt is, hogy ha a 350 tonna árut n egyenlő tömegű részre akarjuk szétosztani, akkor a munka elvégzéséért nekünk $(n-1)\cdot 400$ eurót kell fizetnünk. $\left(n\in \mathbf{N}^{+}\right)$. Hány egyenlő tömegű részletre bontva lenne a legolcsóbb 350 tonna áru elfuvaroztatása?

A szállítási költségekhez adjunk hozzá $(n-1)\cdot 400$ eurót:

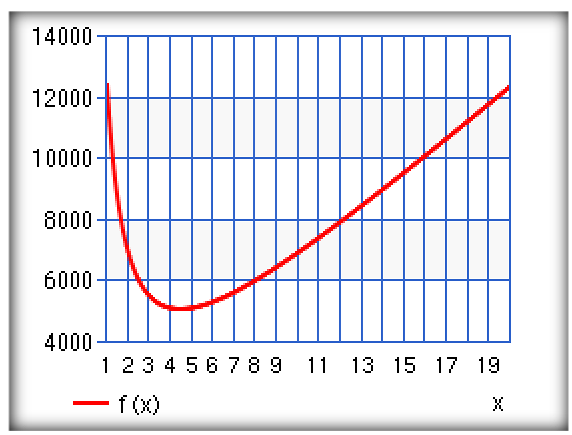
$$\left(\frac{12250}{n}+n\cdot 205\right)+(n-1)\cdot 400=\frac{12250}{n}+n\cdot 605-400$$

Legyen $B(x)=\dfrac{12250}{x}+x\cdot 605-400.$

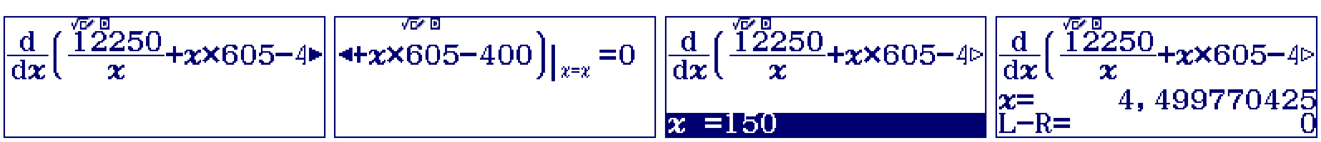
Keressük azt az n értéket, melyre a $B(x)$ a legkisebb értéket veszi fel. Ábrázoljuk a $B(x)$ függvényt! A $g(x)$ függvényhez ne írjunk semmit!

A grafikon alapján látható, hogy az $n=4$ illetve $n=5$ pontokban lehet szélsőérték. Ezek után keressük meg a megoldást a derivált segítségével! $B'(x)=0.$

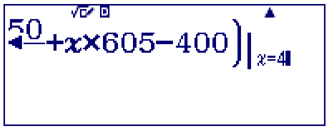
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{12250}{x}+x\cdot 605-400\right)\Bigg|_{x=x}=0.$$

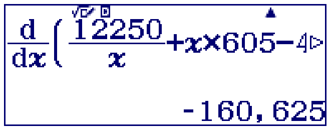


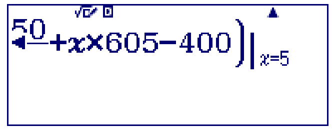
A feltételezett megoldáshoz közeli érték legyen $x=150.$

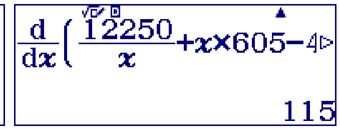


Nézzük meg a függvényértékek előjeleit az $x=4$, illetve $x=5$ pontokban!





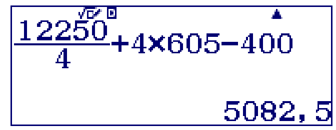




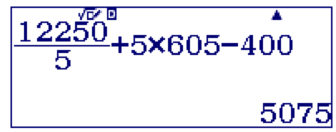
A függvénynek minimuma van az $x \approx 4{,}5$ pontban.

Tehát az *n* értéke 4 vagy 5.

Ha $n=4$ akkor $B(4)=5082{,}5.$



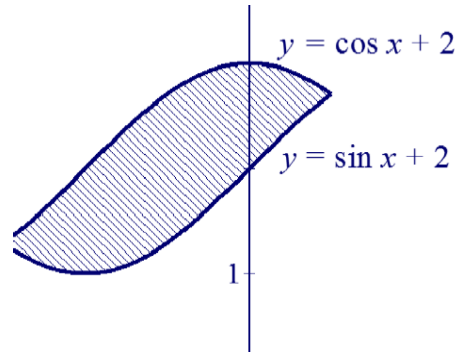
Ha $n=5$ akkor $B(5)=5075.$

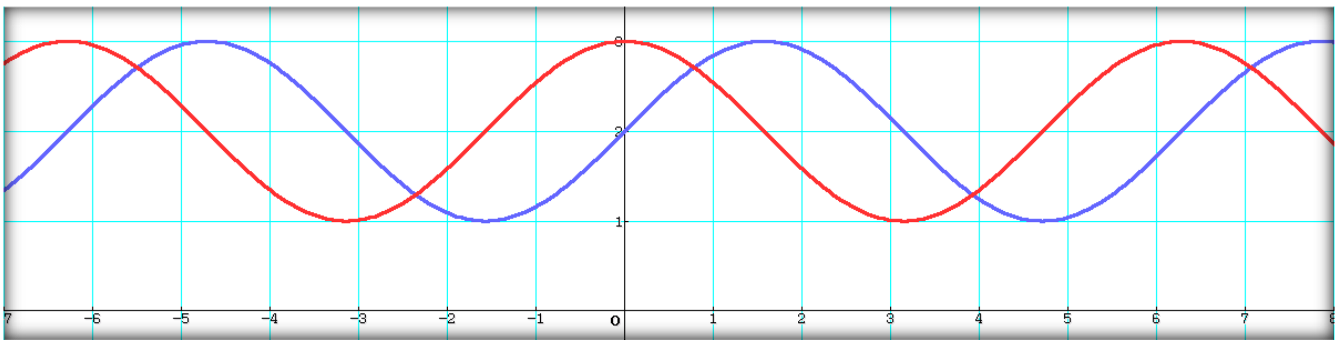


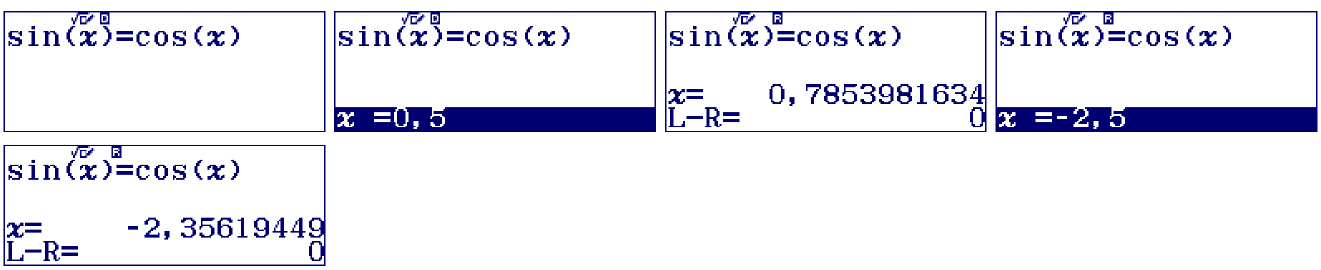
Az kaptuk, hogy az áru elfuvaroztatása 5 egyenlő rész esetén a legolcsóbb.

54 Számítsa ki az ábrán látható két görbe vonal által közrefogott síkidom területét! (Az egyik határoló vonal az $y = \sin x + 2$, a másik pedig az $y = \cos x + 2$ egyenletű görbének egy része.)

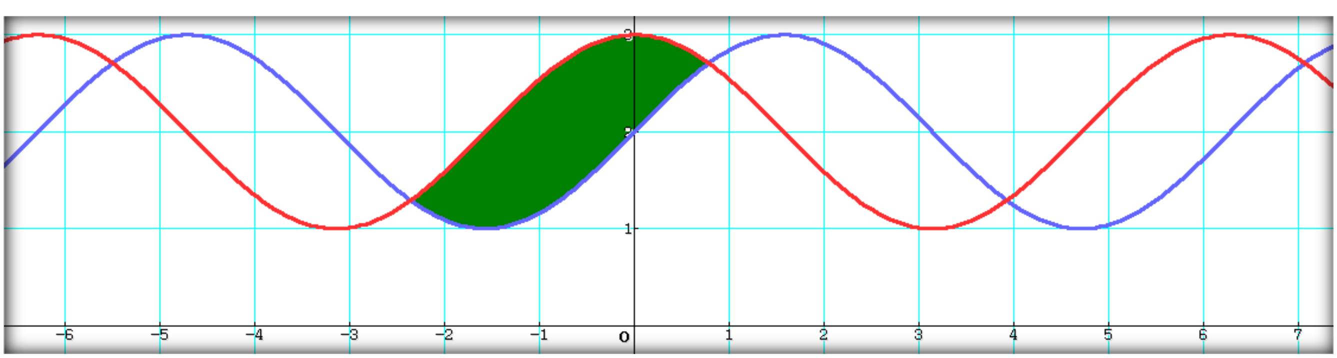
Keressük meg a két függvény metszéspontját! A megoldáshoz használt közelitő értékek 0,5 és $-2{,}5$. (Miért ezeket a közelítéseket választottuk?)





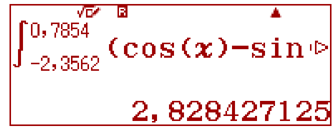


A két megoldás: $x \approx 0{,}7854$ és $x \approx -2{,}3562$. A két megoldás a területhez tartozó integrál határait adja meg.

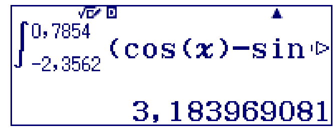


Határozzuk meg a zölddel jelölt terület mértékét! A terület megadható a $\cos x+2$ és a $\sin x+2$ függvények különbségének integráljával az $x\approx 0{,}7854$ és $x\approx -2{,}3562$ közötti szakaszokon:

$$\int_{-2,3562}^{0,7854}\left(\cos x-\sin x\right)\approx 2{,}83$$



Megjegyzés: Ha *deg* üzemmódban dolgozunk, akkor az eredmény körülbelül 3,18. A két üzemmód közötti váltáshoz nem kell kilépni a számításból.



Nyomjuk meg a SHIFT MENU gombokat, majd válasszuk a *szög m. egys* opciót. A kívánt egységre kattintva a számításhoz az = gombbal térhetünk vissza.

55 Igazolja, hogy ha $a_n = \dfrac{11n-5}{3n-8}$ akkor az $\{a_n\}$ sorozat nem monoton, de korlátos! $\left(n \in \mathbf{N}^+\right)$.

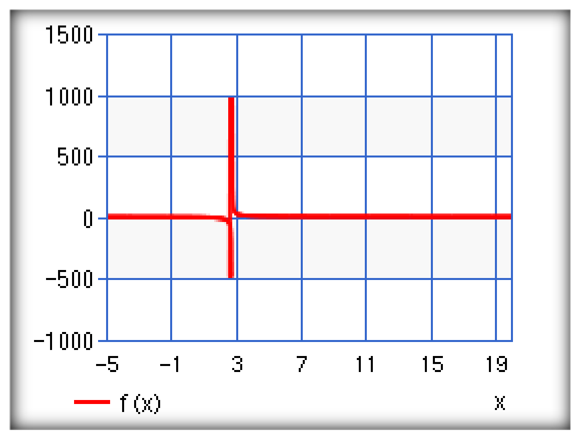
Először a korlátossággal foglalkozunk!

Adjuk meg a sorozat néhány elemét, majd ábrázoljuk a sorozathoz tartozó $f(x) = \dfrac{11x-5}{3x-8}$ függvényt!

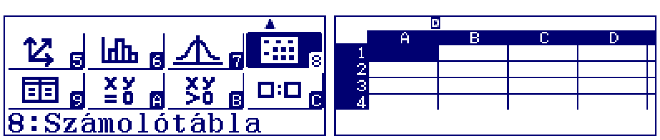
I. A sorozat elemeit *Táblázat* segítségével adjuk meg.

A függvény ábrázolása:

A $\dfrac{8}{3}$ pontban a függvény nincs értelmezve, de ettől a ponttól jobbra lévő értékek már jelzik, hogy a függvény korlátos.



II. A sorozat elemeit *Számolótábla* segítségével is megadjuk:



A **Kezdő**, **Záró** és **Lépés** értékek ugyanazok, mint korábban. Először állítsuk elő a sorozat indexeit! Ehhez adjuk meg a kezdőértéket (-5) majd adjuk meg az utasítást, és végül a tartományt! Az egyes index elemeket úgy kapjuk, hogy az előző index elemhez hozzáadunk 5-öt. A tartomány a A1 mezőtől a A6-ig terjed (-5-től 20-ig 5-sével lépkedve 6 elem van: $-5;0;5;10;15;20$).

Az utasítást (formulát) az OPTN gomb megnyomásával aktiválhatjuk.

A kezdő elem tehát a -5. Az A változót az ALPHA (−) billentyűkkel vihetjük be.

Ezt követően rendeljük hozzá az indexekhez a sorozat elemeit! A képlethez $(11\times A1-5):(3\times A1-8)$ írtunk.

Vizsgáljuk meg a sorozat korlátosságát! A felső korláttal kezdjük.

Egy tört értékét növeljük, ha a számlálót növeljük, vagy a nevezőt csökkentjük.

növelt

$$a_n=\frac{11n-5}{3n-8}<\frac{11n}{3n-8}<\frac{11n}{2n}=\frac{11}{2}=5{,}5.$$

csökkentet

Egy tört értékét csökkentjük, ha a számlálót csökkentjük vagy a nevezőt növeljük.

$$a_n=\frac{11n-5}{3n-8}>\frac{4n}{3n-8}>\frac{4n}{4n}=1$$

Megjegyzés:

- $11n-5<11n$ mindig igaz (a sorozat legkisebb eleme, $n=1$).
- $3n-8>2n$ ha $n>8$.
- $11n-5>4n$ mindig igaz.
- $3n-8<4n$ mindig igaz.

Azt kaptuk, hogy a sorozat két lehetséges korlátja az 1 és 5,5 $(\text{ha } n>8)$.

Tehát a sorozat korlátos.

Vizsgáljuk meg a monotonitást!

A sorozat monoton növekedő (csökkenő), ha minden $n \in \mathbf{N}$-re

$a_{n+1} \geq a_n$ vagy $a_{n+1}-a_n \geq 0$ illetve $a_{n+1} \leq a_n$ vagy $a_{n+1}-a_n \leq 0$

$$a_{n+1}=\frac{11(n+1)-5}{3(n+1)-8}=\frac{11n+6}{3n-5}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{11n+6}{3n-5}-\frac{11n-5}{3n-8}=\frac{(11n+6)(3n-8)-(11n-5)(3n-5)}{(3n-5)(3n-8)}==\frac{-73}{(3n-5)(3n-8)}<0$$

ha $n>2$.

Tehát $a_{n+1}-a_n<0$ ha $n \geq 3$. Hasonlóan

$a_{n+1}-a_n>0$ ha $n \leq 2$.

Tehát nem minden n-re igaz, hogy $a_{n+1} \geq a_n$ vagy $a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow$ a sorozat nem monoton.

Megjegyzés:

A. A függvény grafikonjából is látható, hogy a sorozat nem monoton.

B. Érdekességképpen megmutatjuk a határértékét a $f(x)=\dfrac{11x-5}{3x-8}$ ha $x\to\infty$.

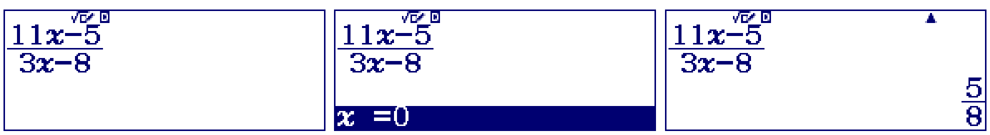
56 Sejtsük meg a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x-5}{3x-8}$ határértéket!

A függvény nem értelmes az $x=\dfrac{8}{3}$ $(\approx 2,6667)$ pontban.

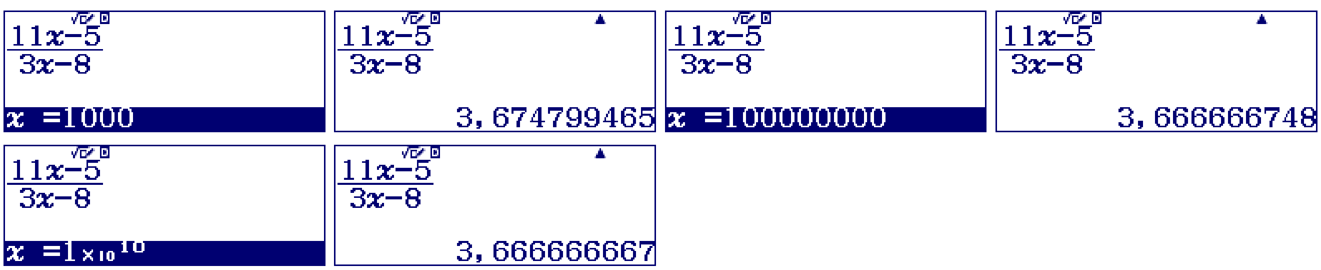
Vigyük be a $\dfrac{11x-5}{3x-8}$ kifejezést '*Számológép'* módban majd nyomjuk meg a $\boxed{\text{CALC}}$ gombot.

Az $x=0$ érték jelenik meg először.

Ha $\boxed{=}$-t nyomunk, akkor az ezen a helyen felvett függvényértéket kapjuk:



Nyomjuk meg még egyszer a $\boxed{\text{CALC}}$ gombot, és változtassuk meg az *x* értékét.



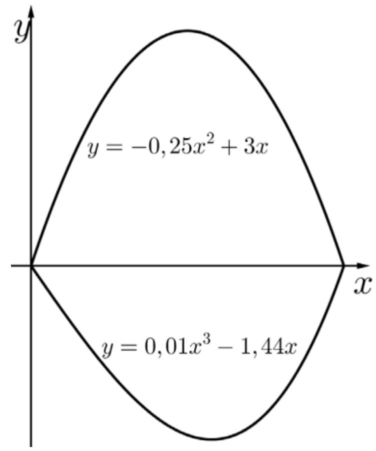
Ez alapján $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x-5}{3x-8}\approx 3,6667$.

Megjegyezzük, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x-5}{3x-8}=\dfrac{11}{3}(\approx 3,67)$

57

A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y=-0,25x^2+3x$, illetve az $y=0,01x^3-1,44x$ egyenletű görbéknek az az íve, amelyre $0\le x\le 12$. (Ez a két ív az ábrán is látható.) Tudjuk, hogy a $(0;0)$ és a $(12;0)$ pont a két ív közös pontja. Mindkét ív esetében adja meg az ív x tengelytől legtávolabbi pontjának első koordinátáját!

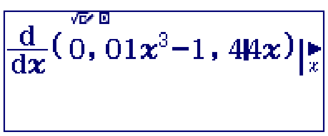
Készítsünk egy vázlatot!



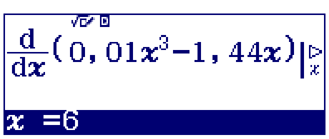
Határozzuk meg az egyes ívek maximumát!

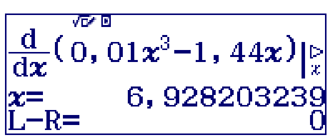
- A parabola szimmetriája miatt a felső ívhez tartozó maximum x koordinátája $x=6\left(=\dfrac{0+12}{2}\right)$.
- Az alsó ívhez tartozó minimum x koordinátáját keressük.

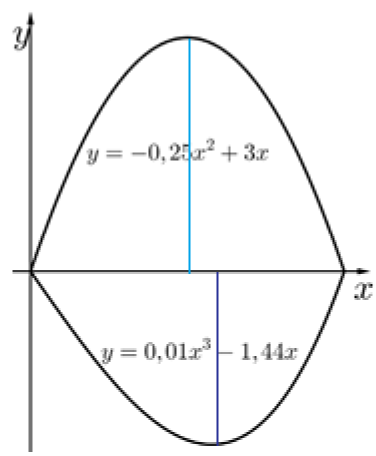
Az első derivált: $\dfrac{d}{dx}\left(0,01x^3-1,44x\right)\Big|_{x=x}=0.$



Közelítő értéknek az $x=6$-ot választottuk.







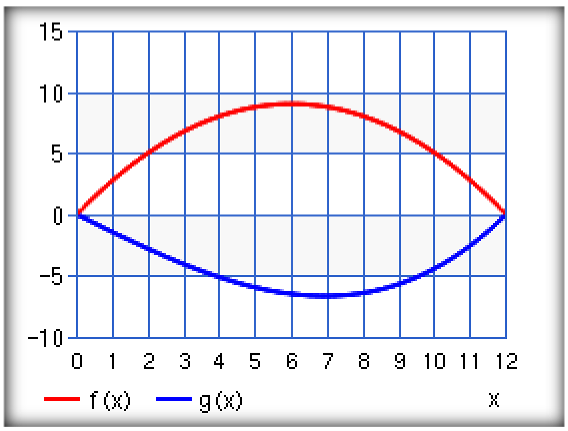
Az alsó ívhez tartozó minimum x koordinátája $x\approx 7$.

Vázlat

58 A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y=-0,25x^2+3x$, illetve az $y=0,01x^3-1,44x$ egyenletű görbéknek az az íve, amelyre $0\le x\le 12$. (Ez a két ív az ábrán is látható.) Tudjuk, hogy a $(0;0)$ és a $(12;0)$ pont a két ív közös pontja. Mekkora a két ív által közre zárt síkidom területe?

Rajzoljuk meg újra a két függvényt!

A két terület összegét kell kiszámítani. A kékkel jelölt függvény területére negatív értéket kapunk, ezt azonban pozitív értékkel kell figyelembe venni.

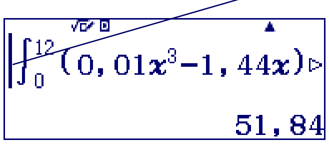


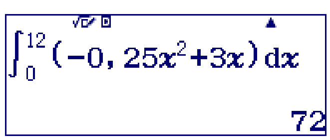
$$T_1=\int_0^{12}\left(-0,25x^2+3x\right)dx$$

$$T_2=\left|\int_0^{12}\left(0,01x^3-1,44x\right)dx\right|$$

$$T=T_1+T_2$$

abszolútérték





A keresett terület: $T=T_1+T_2=123,84$ [egység]

Megjegyzés: az abszolútértéket a SHIFT (gombokkal vihetjük be.

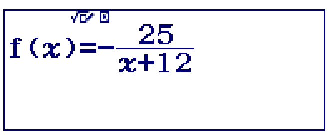
59 Értelmezzük a $]0;12[$ intervallumon az alábbi hozzárendeléssel megadott f és g függvényeket: $f(x)=\dfrac{-0,25x^2+3x}{0,01x^3-1,44x}$ és $g(x)=-\dfrac{25}{x+12}$. Igazolja, hogy $f(x)=g(x)$, és mutassa meg, hogy a g függvény szigorúan monoton növekvő!

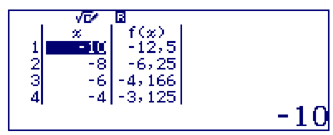
Tudjuk, hogy az $f(x)$ függvény számlálójában és nevezőjében szereplő függvények közös pontja 0 és 12.

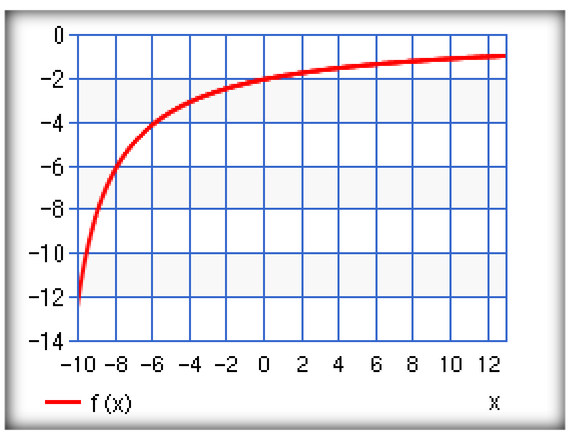
Alakítsuk szorzattá az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket! $(x \neq 0;12)$

$$f(x)=\frac{-0,25x^2+3x}{0,01x^3-1,44x}=\frac{x(-0,25x+3)}{x(0,01x^2-1,44)}=\frac{-25x+300}{x^2-144}=\frac{-25(x-12)}{(x-12)(x+12)}=\frac{-25}{x+12}=g(x)$$

Megjegyzés: A $g(x)$ függvény képe:





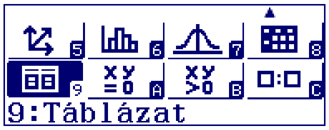


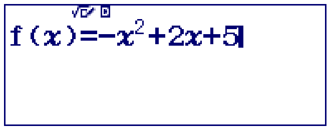
Látható, hogy $]0;\ 12[$ intervallumban a $g(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő.

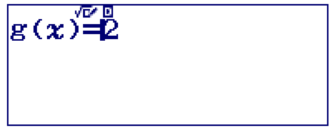
Megjegyezzük, hogy az alap függvény $\left(\dfrac{1}{x}\right)$ szigorúan csökken, így a $-\dfrac{1}{x}$ vagy $-\dfrac{25}{x}$ és a $-\dfrac{25}{x+12}$ függvények szigorúan monoton növekedőek.

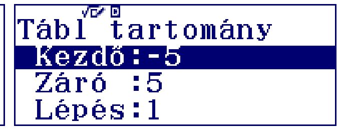
60

Adott az $y=-x^2+2x+5$ egyenletű parabola. Az $y=2$ egyenletű egyenes és a parabola első síknegyedbeli metszéspontját jelöljük P-vel. Számítsa ki a parabola P pontbeli érintőjének a meredekségét!

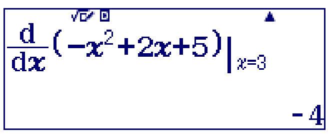


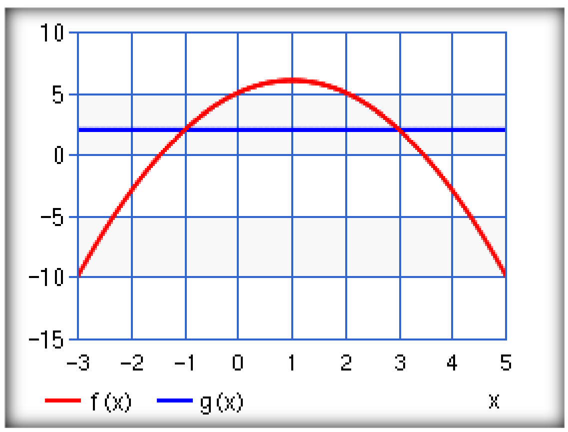






Jól látszik, hogy az első síknegyedben a parabola és az egyenes a $P(3;2)$ pontban metszi egymást. Határozzuk meg a derivált értékét ebben a pontban!





A parabola P pontbeli érintőjének a meredeksége -4.

61

Határozza meg az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ függvényben az a, b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk a következőket:

(1) $f(1)=f(-1)+4$;

(2) $f'(3)=10$ (f' az f deriváltfüggvénye);

(3) $\int_0^2 f(x)dx=-8$.

Írjuk át a feltételeket a függvény hozzárendelési utasítása alapján!

(1) $f(1)=f(-1)+4$.

$1+a+b+c=-1+a-b+c+4 \Rightarrow -2=-2b \Rightarrow$

$b=1$

(2) $f'(3)=10$.

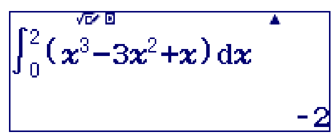
$f'(x)=3x^2+2ax+b=3x^2+2ax+1 \Rightarrow 10=27+6a+1 \Rightarrow$

$a=-3$

Eddig $f(x)=x^3-3x^2+x+c$.

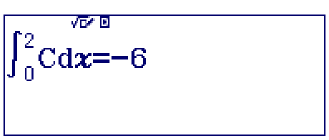
(3) $\int_0^2 f(x)dx=-8$.

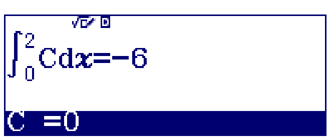
$$\int_0^2\left(x^3-3x^2+x+c\right)dx=\int_0^2\left(x^3-3x^2+x\right)dx+\int_0^2 cdx=-2+\int_0^2 cdx.$$

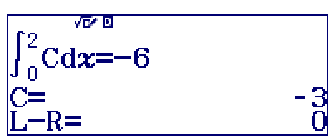


$$-2+\int_0^2 cdx=-8 \Rightarrow \int_0^2 cdx=-6.$$

Kezdőértéknek a $C=0$-t választottuk.







Megoldás: $a=-3$; $b=1$; $c=-3$.

62 Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvény grafikonjának tengelypontja $T(4;2)$; és a $P(2;0)$ pont is illeszkedik a grafikonra. Számítsa ki az a, b, c együtthatók értékét!

A parabola tengelypontja nem más, mint a parabola csúcsa. A szimmetria miatt a parabola tengelypontjának x koordinátája a zérushelyek számtani közepe:

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=-\frac{b}{2a}$$

I. $4=-\dfrac{b}{2a}\Rightarrow b=-8a\Rightarrow 0=b+8a$

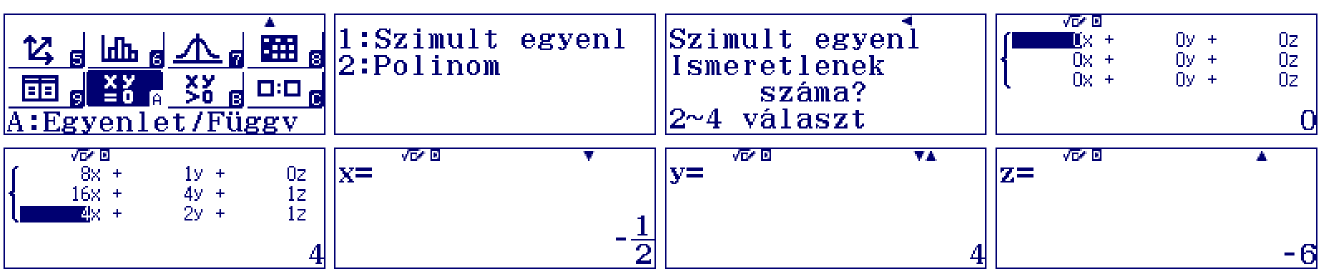
II. Másrészt, ha $x=4$ akkor $y=2$ így $2=16a+4b+c$

III. A parabola illeszkedik a $P(2;0)$ pontra, így $0=4a+2b+c$

Összefoglalva:

I. $0=8a+b$
II. $2=16a+4b+c$
III. $0=4a+2b+c$

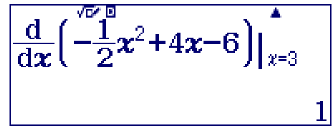
Használjuk a beépített háromismeretlenes egyenletmegoldó funkciót!



Megoldás: $a=-\dfrac{1}{2},\quad b=4\ \text{ és }\ c=-6.$

63 Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvény grafikonjának tengelypontja $T(4;2)$; és a $P(2;0)$ pont is illeszkedik a grafikonra. Írja fel a grafikon 3 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenletét!

A parabola egyenlete: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-6.$

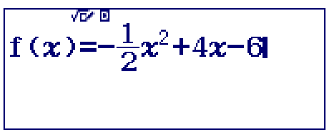


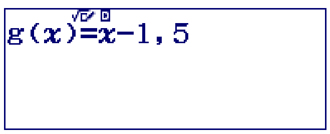
A meredekség az $x=3$ pontban: 1. A parabola *y* koordinátája az $x=3$ pontban 1,5.

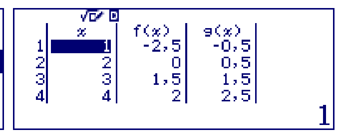
$$y=x+b\Rightarrow 1{,}5=3+b\Rightarrow b=-1{,}5$$

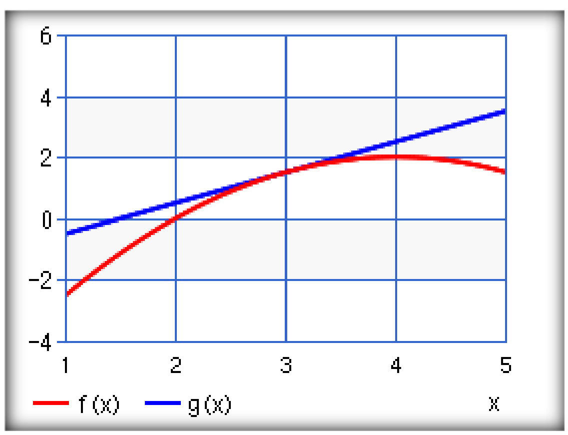
Az érintő egyenes egyenlete: $y=x-1{,}5.$

Megjegyzés. Ábrázoljuk a parabolát és az $x=3$ pontba húzott érintőt!





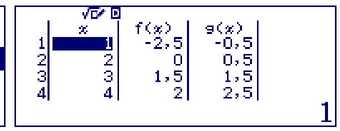


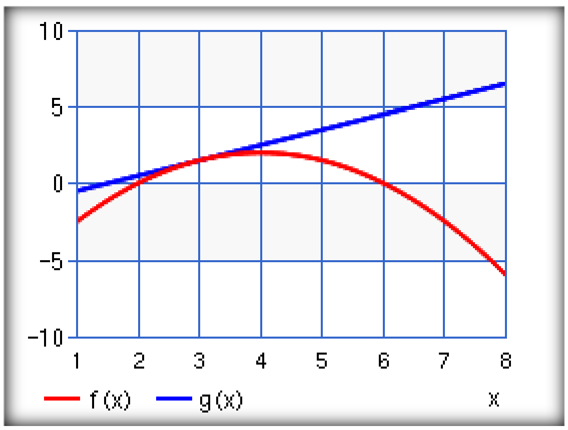


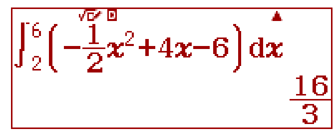
64

Az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvény grafikonjának tengelypontja $T(4;2)$; és a $P(2;0)$ pont is illeszkedik a grafikonra. Számítsa ki az *f* grafikonja és az *x* tengely által határolt tartomány területet!

Változtassuk meg a táblázat tartományait!







A parabola az $x_1=2$ és $x_2=6$ pontokban metszi az *x* tengelyt.

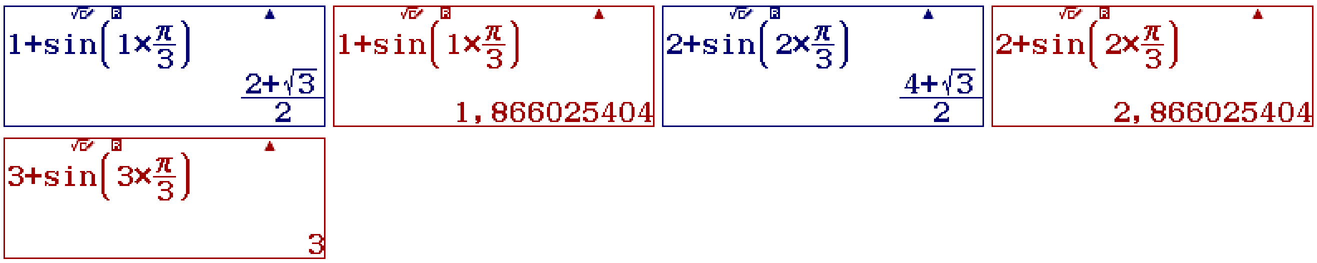
Megoldás: a parabola grafikonja és az *x* tengely által határolt tartomány területe $\frac{16}{3}$ [egység].

65

Vizsgáljuk azt a sorozatot, amelynek n-edik tagja adott $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén: $a_n = n + \sin(n\alpha)$.

Legyen $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Írja fel a sorozat első három tagjának pontos értékét!

$$a_n = n + \sin(n\alpha) = n + \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right)$$



Megoldás: $a_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$; $a_2 = \frac{4+\sqrt{3}}{2}$; $a_3 = 3$.

66

Milyen $\alpha \in [0;\ 2\pi]$ esetén lesznek az $a_1,\ a_2,\ a_3$ számok – ebben a sorrendben – egy konstans sorozattól különböző számtani sorozat szomszédos tagjai?

Az $a_1,\ a_2,\ a_3$ számok számtani sorozatot alkotnak, ha $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$.

$$2 + \sin(2\alpha) = \frac{1 + \sin\alpha + 3 + \sin(3\alpha)}{2} \Rightarrow$$

$$\sin(\alpha) + \sin(3\alpha) - 2\sin(2\alpha) = 0$$

Azonosságok:

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ és

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

A két azonosságot felhasználva

$\sin(\alpha) + \sin(3\alpha) = 2\sin(2\alpha)\cos\alpha$ ezért

$$\sin(\alpha) + \sin(3\alpha) - \sin(2\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$2\sin(2\alpha)\cos\alpha - 2\sin(2\alpha) = 0$$

Tehát:

$$\sin(2\alpha)(\cos\alpha - 1) = 0 \nearrow \boxed{\text{A) } \sin(2\alpha) = 0} \qquad \searrow \boxed{\text{B) } \cos\alpha - 1 = 0}$$

A) $\sin(2\alpha)=0$. Legyen $2\alpha = x$, így az egyenlet $\sin(x)=0$.

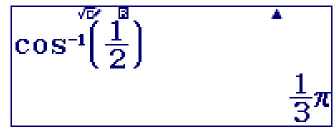
$2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ és

$2\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

$2\alpha = 2\pi \Rightarrow \alpha = \pi$

$2\alpha = 3\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{2}$

B) $2\cos\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$



Egy megoldásra számítunk (a cos az első és a második negyedik pozitív).

Megoldás: az α lehetséges értékei: 0; $\dfrac{\pi}{2}$; π; $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{1}{3}\pi$.

Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén
67 fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára *annyiszor 400 Ft-tal* csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat. Adja meg annak a B függvénynek az $x \to B(x)$ hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételét jelöli x utassal indított járat esetén! Mi a B függvény értelmezési tartománya?

Egyedül csak azt az esetet részletezzük, amikor 20 vagy afeletti utas akar indulni.

$20 \le x \le 36,$

$$B(x) = 16000 \cdot x - \left[\overbrace{(x-20)\cdot 400}^{\text{Kedvezmény/fő}}\right] \cdot x = 24000x - 400x^2$$

Megoldás: $B(x) = \begin{cases} 0 \le x < 10, & B(x) = 0 \\ 10 \le x < 20, & B(x) = 16000 \cdot x \\ 20 \le x \le 36, & B(x) = 24000x - 400x^2 \\ x \in \mathrm{N} \end{cases}$

68 Hány utas esetén lesz a repülőtársaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

I. Ha $0 \le x < 10$, $B(x) = 0$. Így a társaság bevétele 0 Ft.

II. Ha $10 \le x < 20$, $B(x) = 16000 \cdot x$. Ez esetben akkor a legnagyobb az összeg, ha $x = 19$ (304000 Ft.)

III. Ha $20 \le x \le 36$, $B(x) = 24000x - 400x^2$.

Akkor egy lefelé néző paraboláról van szó, amelynek maximuma a két zérushely számtani középéhez tartozó függvényérték.
Látható, hogy a két zérushely 0 és 60.
Számtani közepük 30.
$B(30) = 24000 \cdot 30 - 400 \cdot 30^2 = 360000$ Ft.

$24000 \times 30 - 400 \times 30^2$
360000

Megoldás: 30 utas esetén legnagyobb a bevétel. A maximális bevétel 360000 Ft.

Megjegyzés:

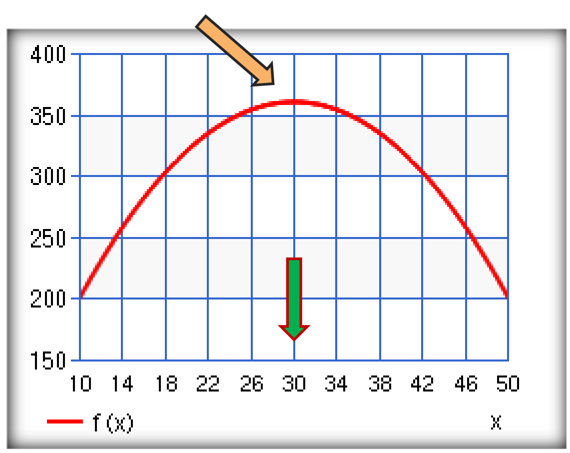
Az $20 \le x \le 36$, $B(x) = 24000x - 400x^2$ esethez tartozó parabolát nem könnyű megrajzolni.

Tekintsük a következő függvényt:

$$C(x) = \frac{B(x)}{1000} = 24x - 0,4x^2$$

A $C(x)$ maximum helyét keressük.

$f(x) = 24x - 0,4x^2$



Látható, hogy a függvény a maximumot az $x = 30$ pontban veszi fel (az értéke 360).

69

Egy játéküzemben fa elemekből álló építőkészletet gyártanak. Ha x darab készletet gyártanak naponta, akkor a teljes gyártási költség $k(x)=\frac{x^{1,5}}{5}+12x+300$ euró. Egy készletet 18 euróért tudnak értékesíteni. Naponta hány készletet gyártson az üzem, hogy a haszon a lehető legnagyobb legyen? Mennyi ez a maximális haszon?

A gyártási költség ’negatív haszon’.

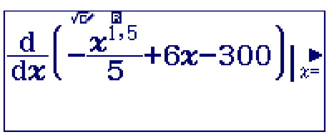
x darab eladása esetén a bevétel $18\cdot x$ [Euró]. Jelöljük $T(x)$-szel a teljes hasznot.

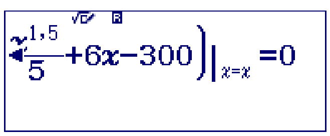
$$T(x)=18x-\left(\underbrace{\frac{x^{1,5}}{5}+12x+300}_{\text{Negatív haszon}}\right)=-\frac{x^{1,5}}{5}+6x-300.$$

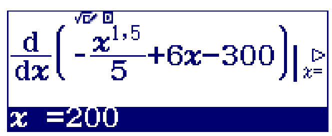
A $T(x)$ függvény maximumát keressük.

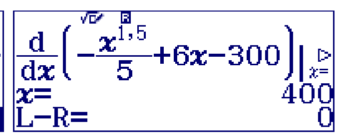
Határozzuk meg azokat a pontokat, ahol a $T(x)$ deriváltja 0.

A deriválthoz tartozó egyenletben a x közelítő értékét 200-nak választjuk (feltételezzük, hogy naponta legalább 200 darab készletet gyártanak).





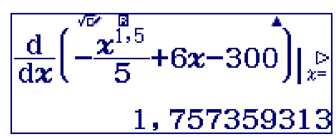




Nézzük meg az előjeleket.

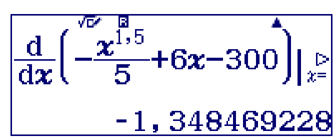
Az $x=200$ és $x=600$ értékekhez tartozó előjeleket vizsgáljuk:

$x=200$



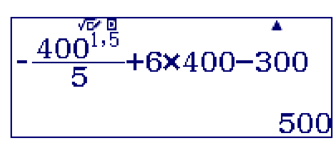
és

$x=600$



A függvény előjeléből látjuk, hogy az $x=400$ pontban maximum van.

Megoldás: napi 400 darab készlet gyártása esetén lesz a haszon a lehető legnagyobb.
A maximális haszon: 500 [Euró].



FÜGGELÉK

A SZÁMOLÓGÉPRŐL

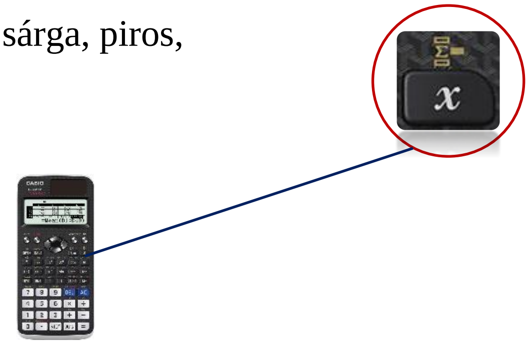
No.	
1	Színek a számológépen
2	Gombok
3	Változók
4	Alapállapot, AC, INS, DEL
5	Memória (M+, M, STO, RECALL)
6	Hatványok, prímfaktorizáció, különböző alapú számok konvertálása

BEVEZETÉSEK

No.	
7	Komplex számok
8	Mátrixok
9	Vektorok
10	A Casio fx-991CE X funkcióinak listája

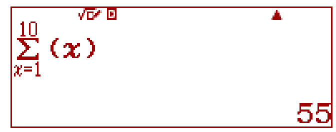
1. SZÍNEK A SZÁMOLÓGÉPEN

A számológépen lévő négyféle színnel foglalkozunk: sárga, piros, lila és kék.



- A sárgával jelzett funkciók aktiválásához a SHIFT gombot használjuk.

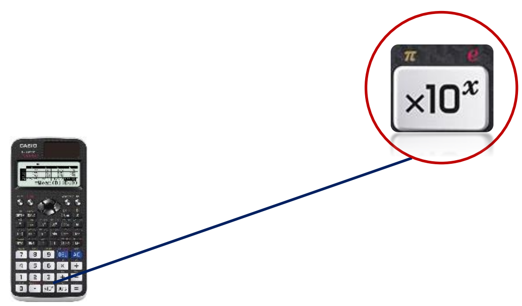
Példa: $\sum_{x=1}^{10}(x)=?$



Megoldás: $\sum_{x=1}^{10}(x)=55$

SHIFT x x – ◀ ◀ ◀ – ◀ 1 0 – ▼ 1 =

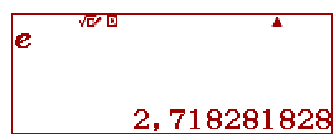
- A pirossal jelzett funkciók, szimbólumok aktiválásához az ALPHA gombot használjuk.



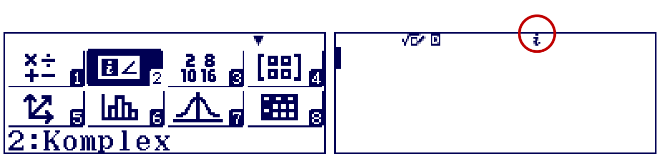
Példa: $e\approx ?$

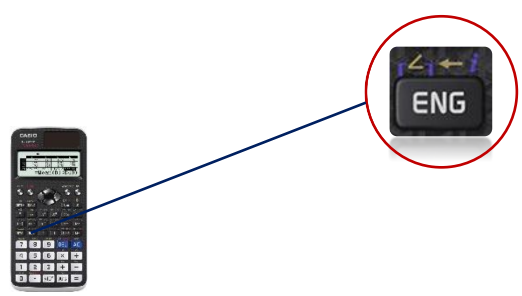
Megoldás: $e\approx 2{,}72$

ALPHA ×10^x =



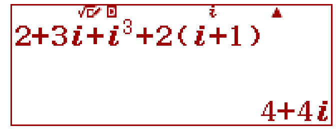
- Lila: ezen funkció használata előtt a számológépet *Komplex* módba kell állítani.





Példa: egyszerűsítsük a következő kifejezést: $2+3i+i^3+2\cdot(i+1)$.

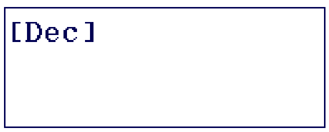
Megoldás: $2+3i+i^3+2\cdot(i+1)=4+4i$

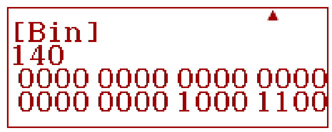


[2] [+] [3] – [ENG] [+] [ENG] – [x■] [3] [▶] – [+] [2] [(] – [ENG] [+] [1] – [)] [=]

- Kék: ezzel a funkcióval a számrendszer alapját lehet megváltoztatni.

Példa: Adjuk meg az x értékét, ha $140_{10}=x_2$! (Az alsó index az alap.)

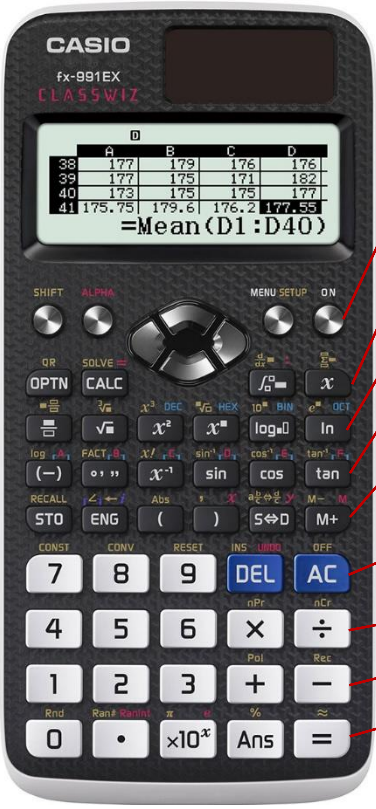




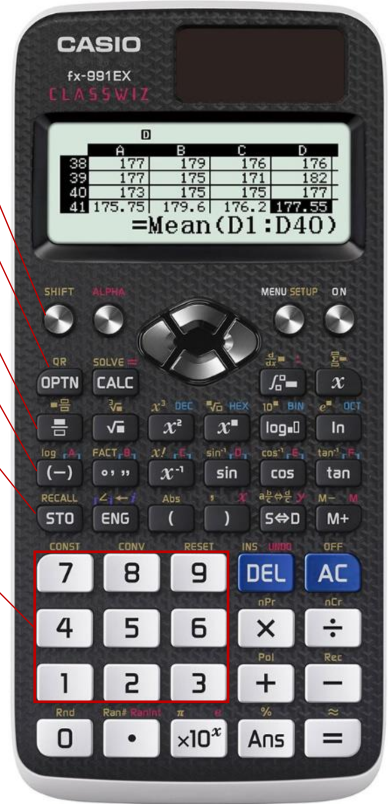
Megoldás: $140_{10}=10001100_2$

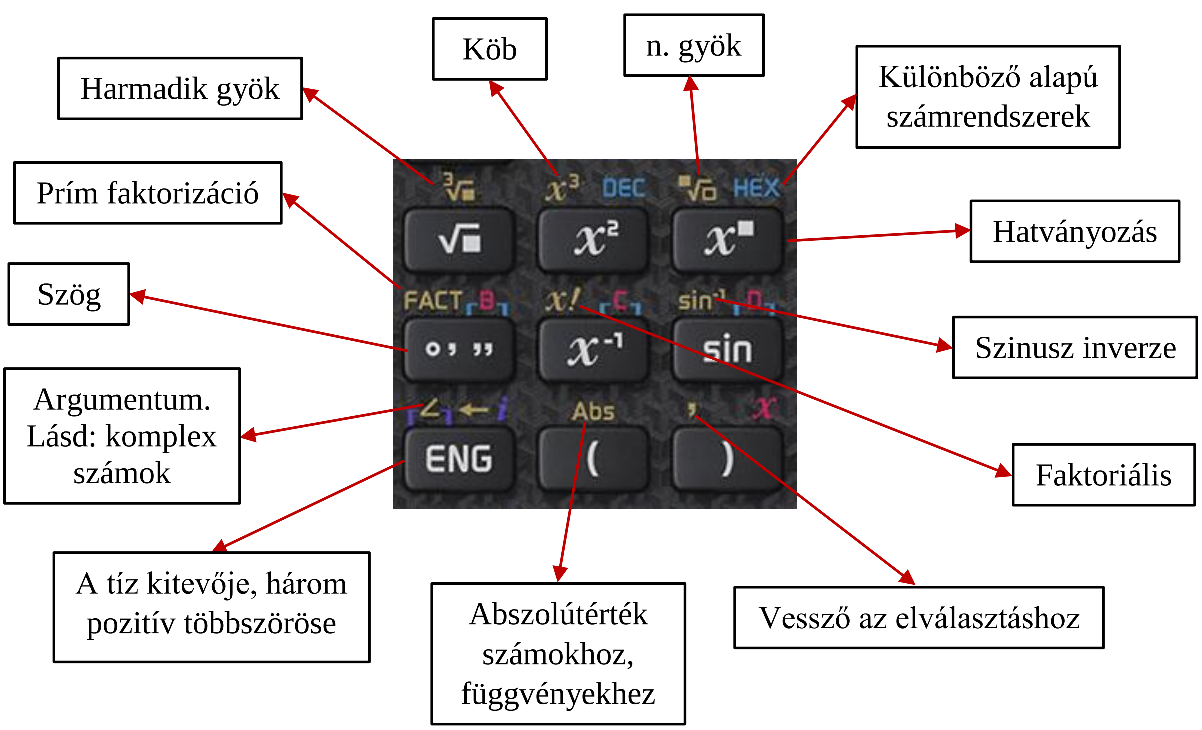
A gombkombináció a második képtől: [1] [4] [0] – [=] [log■□]

2. Gombok



Bekapcsolás	SHIFT
x Változó	Opció az aktuális módhoz
e alapú logaritmus	Tört
Tangens	Mínusz jel
Szám hozzáadása a memóriához	Szám tárolása a memóriába
A legutolsó bejegyzés törlése	Számpad
Osztás	
Különbség	
Egyenlőség	



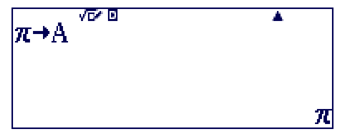


3. Változók

Ha egy algebrai kifejezés vagy függvényérték kiszámolásánál ugyanazt a számot többször használjuk, akkor a számot érdemes tárolni egy változóhoz kötve. 9 változót lehet tárolni: A, B, C, D, E, F, M, x, és y.

Példa: Rendeljük az A változóhoz a π -t, majd számoljuk ki a következő kifejezés értékét: $\cos A + \sin A + \sin(2A)$.

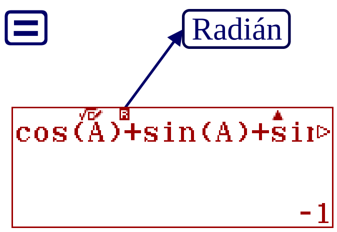
A π tárolása:



SHIFT ×10^x STO – (–)

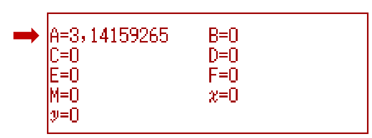
Írjuk be a kifejezést, majd számoljuk ki az értékét:

cos ALPHA (–) –) + sin – ALPHA (–)) – + sin 2 – ALPHA (–)) – =



Megoldás: $\cos A + \sin A + \sin(2A) = -1$

A tárolt változót a SHIFT STO gombok megnyomásával hívhatjuk elő.



Az A változó értékét egy új érték hozzárendelésével lehet megváltoztathatni (ha az A változóhoz a 0-t rendeljük, akkor alapértékbe kerül a változó).

Megjegyzés: a számológép minden egyes értéket tárol még akkor is, ha módot változtatunk, vagy ha a számológépet kikapcsoljuk. Ugyanakkor, ha a számológépet alaphelyzetbe állítjuk (lásd a következő oldal), akkor minden érték törlődik a memóriából.

4. Alapállapot, AC, DEL, INS

Alapállapot

Lehetőségünk van alaphelyzetbe állítani a beállításokat, a memóriát vagy mindkettőt. Például a memória alaphelyzetbe állítása így végezhető el:

SHIFT 9 2 – = AC


```
Visszaállítás?
1:Beáll adatok
2:Memória
3:össz visszaáll
```

```
Visszaállítás OK?
Memória
[=]    :Igen
[AC]   :Mégsem
```

```
 Visszaállítás!
Memória

 Nyomja [AC] gomb
```

Megjegyzés: ha a memóriát választjuk, akkor a változók értéke is törlésre kerül.

AC

AC A legutolsó számítás eredményét törli a képernyőről. Ezen felül ezt a gombot *Táblázat* módban a beírt adatok tárolására is használjuk. Ez a funkció nagyon hasznos, ha elgépeltük a kifejezést és szeretnénk javítani anélkül, hogy még egyszer beírnánk a teljes kifejezést.

Tekintsük a következő kifejezést: $\sqrt{3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 56°}$

Javítsuk a $\cos 56°$-t $\cos 76°$-ra

A kifejezés beírása után az AC gombot nyomjuk meg. (Nem pedig az ON gombot!)

```
◀2−2×3×5×cos(56)
```

```
√3²+5²−2×3×5×cos(▷
        4,150206368
```

```
◀5²−2×3×5×cos(76)
```

```
√3²+5²−2×3×5×cos(▷
        5,171299946
```

A korábban beírt számításokhoz, használjuk a ▲ gombot:

```
√3²+5²−2×3×5×cos(▷
        5,171299946
```

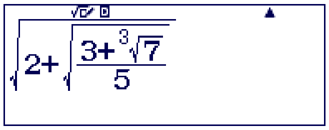
```
√3²+5²−2×3×5×cos(▷
        4,150206368
```

Megjegyzés: az ON megnyomásával végleg töröljük a korábbi bejegyzéseket.

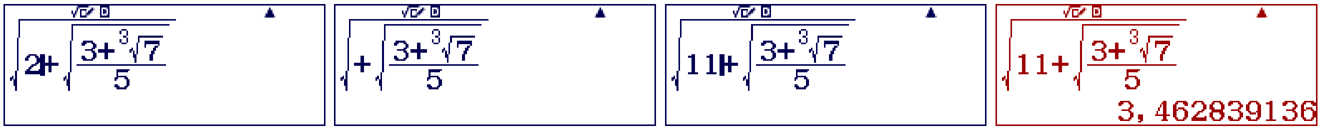
DEL, INS

A *delete* (DEL) és *insert* (INS) gombok segítségével a beírt adatokat vagy műveleteket szerkeszthetjük.

➢ Tekintsük a következő kifejezést: $\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{3+\sqrt[3]{7}}{5}}}$



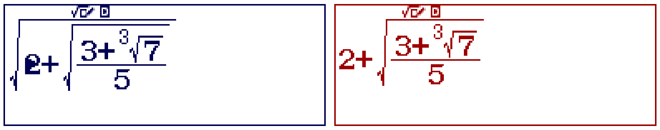
Változtassuk meg a 2-t 11-re. Ehhez mozgassuk a kurzort a 2 végéhez, és nyomjuk meg a DEL gombot. Végül, írjuk be a kívánt számot:



A DEL használható műveletek törlésére is.

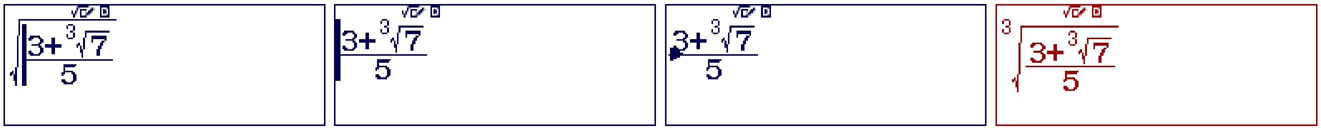
➢ Tegyük fel, hogy a 2 előtt lévő négyzetgyököt szeretnénk törölni anélkül, hogy az egész kifejezést újra írjuk. A kívánt szám: $2+\sqrt{\dfrac{3+\sqrt[3]{7}}{5}}$.

Mozgassuk a kurzort a 2 elé, majd nyomjuk meg a DEL gombot:



Végezetül, változtassuk meg a $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt[3]{7}}{5}}$ kifejezésben a gyök jelét köbgyökjellé!

Használjuk az INS gombot! Mozgassuk a kurzort a gyök elé, majd töröljük a gyök jelét a DEL gombbal! A köbgyök beírása előtt aktiváljuk az INS gombot: SHIFT DEL



5. Memória (M+, M, STO, RECALL)

A. Változóhoz tartozó memória
B. Független memória

Példa: Magyarázzuk meg mit jelent a változóhoz tartozó memória és hasonlítsuk ezt össze a független memóriával!

Tároljuk a következő szám értékét: $\cos 35°$.

A. Változóhoz tartozó memória:

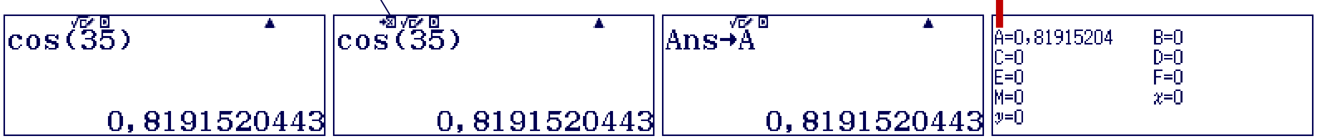
COS 3 5 –) = STO – (–) AC

A szám tárolásához a STO és az A változót használjuk.

A szám előhívásához nyomjuk meg a SHIFT STO (RECALL) gombokat.

STO

A tárolt szám



Helyezzük a számológépet alaphelyzetbe.

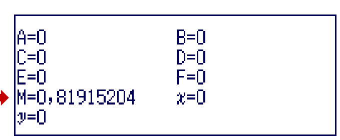
Tároljuk a következő szám értékét: $\cos 35°$.

B. Független memória

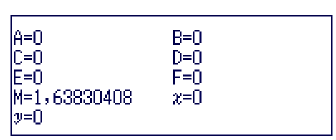
COS 3 5 –) = M+ – AC

A tároláshoz az M+ gombot használtuk.

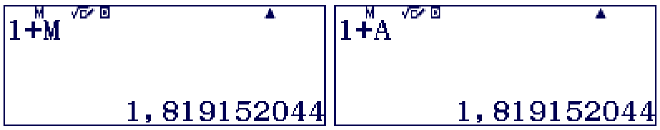
A tárolt szám:



Fontos megjegyezni, hogy a tárolás után az AC vagy az ON gombot kell megnyomni, ellenkező esetben a tárolt érték megváltozik! Például, ha a tárolás után kétszer egyenlőséget (=), nyomunk akkor a tárolt érték az eredmény kétszerese.



A tárolt szám automatikusan felveszi az M változót, ami az M+ memória gombra utal. Valójában ezen a ponton nincs különbség a két hozzárendelés között. Például, ha 1-et adunk az M és A változókhoz, az eredmény ugyanaz:



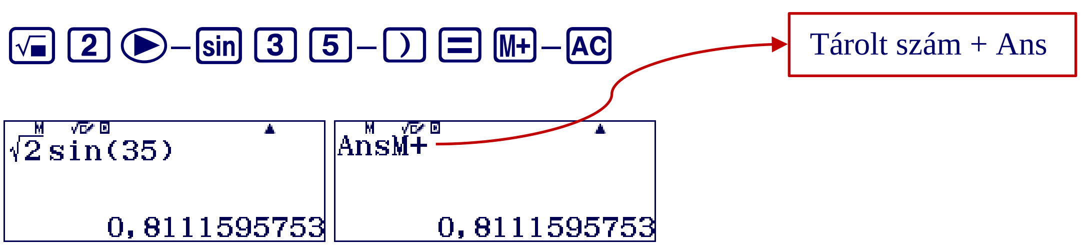
Ugyanakkor az A változó fix, és addig nem változik, míg egy új számot nem rendelünk hozzá. Ezzel szemben, az M változó értékét változtatni tudjuk, anélkül, hogy külön értéket rendelnénk hozzá.

Műveletek a memóriával

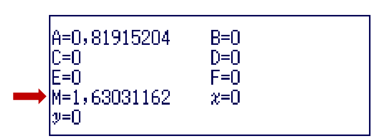
a. M+

Számoljuk ki a következő szorzat értékét, majd adjuk az eredményt a memóriához: $\sqrt{2} \cdot \sin 35°$.

A korábban tárolt érték: $\cos 35° \approx 0{,}8191$. Ezt kell, a szorzathoz adni. A kapott szám lesz az új értéke az M változónak.



Hívjuk elő az M értékét:



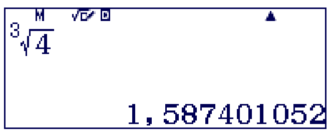
Az M értéke változott.

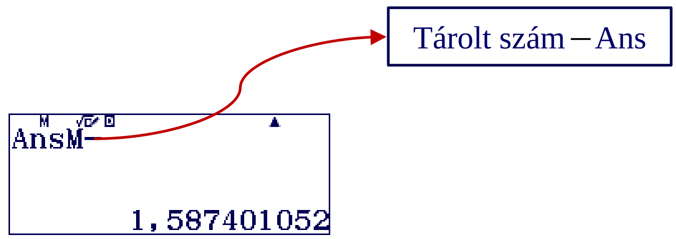
Megoldás: Az új M értéke: 1,63031162 (≈0,81115957+0,81915204)

b. M –

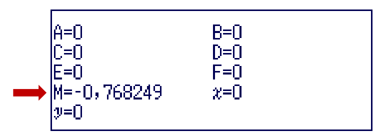
Adjuk meg a következő szám értékét, majd vonjuk ki az eredményt a memóriából: $\sqrt[3]{4}$.

A korábban tárolt memória értéket használva: $\cos 35° \approx 0{,}8191$. Ezt kell, a szorzathoz adni. A kapott szám lesz az új értéke az M változónak.





Hívjuk elő az M értékét:



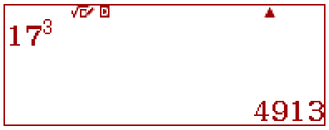
Az M értéke változott.

Megoldás: az új M értéke: $-0{,}768249$ ($\approx$0,81115957-1,58740105)

6. Hatvány, prímfaktorizáció, számrendszer alapjai

Hatvány

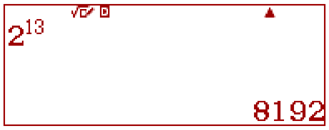
Példa: $17^3 = ?$



1 7 SHIFT – x^2 =

Megoldás: $17^3 = 4913$

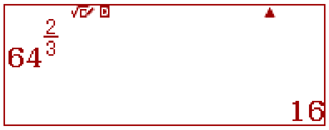
Példa: $2^{13} = ?$



2 $x^{\blacksquare}$ 1 – 3 =

Megoldás: $2^{13} = 8192$

Példa: $64^{\frac{2}{3}} = ?$



6 4 $x^{\blacksquare}$ – ▭ 2 ▼ – 3 =

Megoldás: $64^{\frac{2}{3}} = 16$

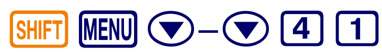
Prímfaktorizáció

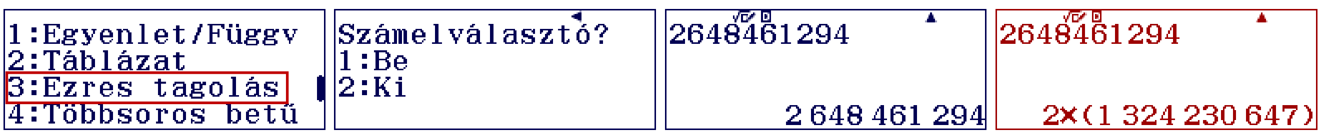
Példa: Végezzünk el prímfaktorizációt a következő számokon:

A. 67914

Megoldás: $67914 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 11$

B. 2648461294

A folytatás előtt aktiváljuk az *Ezres tagolás*-t. 



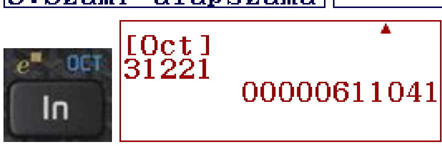
A számológép nem képes felbontani a zárójelben lévő számot. Ez a szám lehet prím - vagy összetett szám.

Megoldás: $2648461294 = 2 \cdot 1\ 324\ 230\ 647$

Számrendszer alapjai (konverzió)

Példa: $31221_6 = X_8$. Adjuk meg az X értékét!

Nyomjuk meg: 

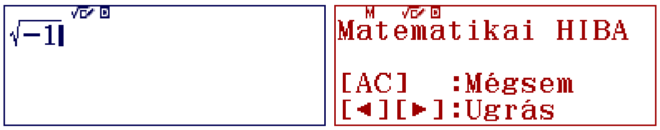


Megoldás: $31221_6 = 611041_8$

7. Komplex számok (bevezetés)

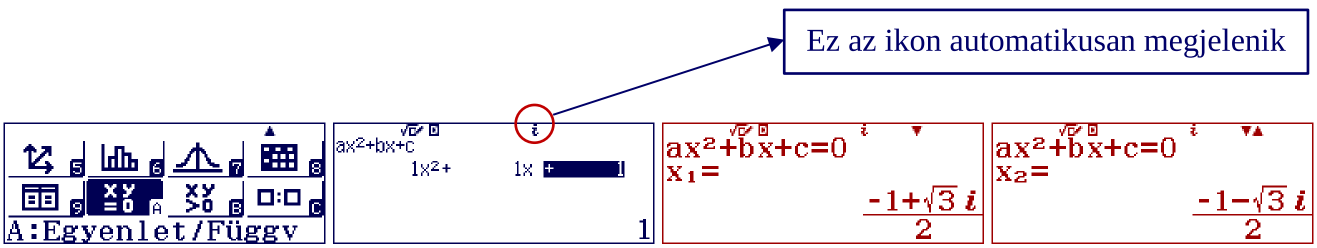
Alapbeállítás: A számológép *Számológép* módban van.

Példa: írjuk be a számológépbe: $\sqrt{-1}$.



Megoldás: a számológép hibát jelez.

Példa: találjuk meg a megoldást: $x^2 + x + 1 = 0$

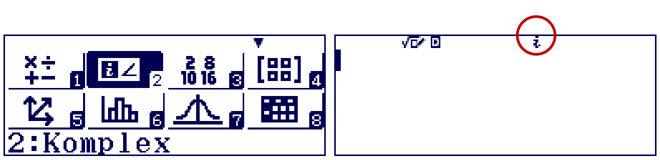


Megoldás: $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ és $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

Megjegyzés: A számológépet nem szükséges átállítani *Komplex* módba, ha a komplex megoldásait szeretnénk bármilyen másodfokú egyenletnek.

Műveletek komplex számokkal

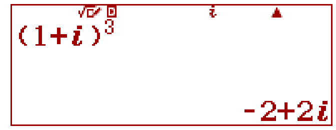
Változtassuk át a módot *Komplex*-re.



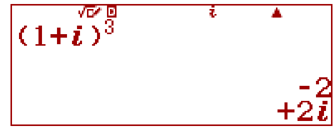
Ebben a módban kiszámolhatjuk komplex számok összegét, különbségét, szorzatát vagy hányadosát. Az eredmény $a + bi$ formában jelenik meg.

Példa:

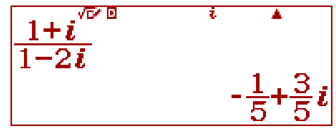
A) $(1+i)^3=?$



A valós és képzetes részhez nyomjuk meg az S⇔D gombot.



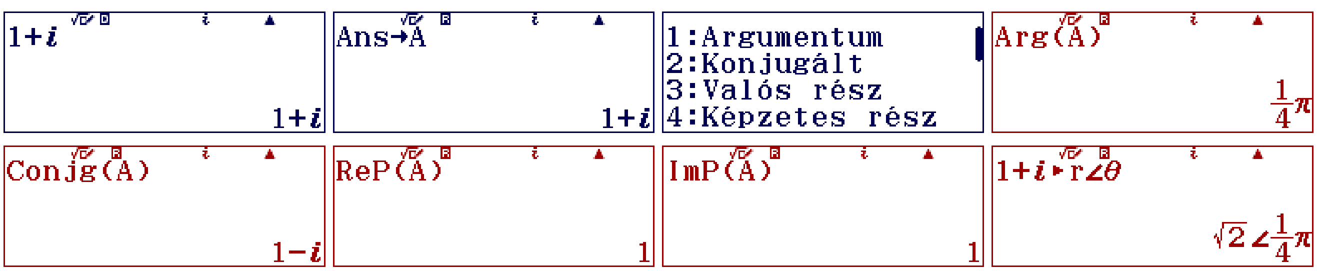
B) $\dfrac{1+i}{1-2i}=?$



Speciális parancsok OPTN

Példa: Írjuk fel a következő komplex számot trigonometrikus alakban: $1+i$. Adjuk meg ennek a számnak az argumentumát, konjugáltját, valós és képzetes részét és az r értékét.

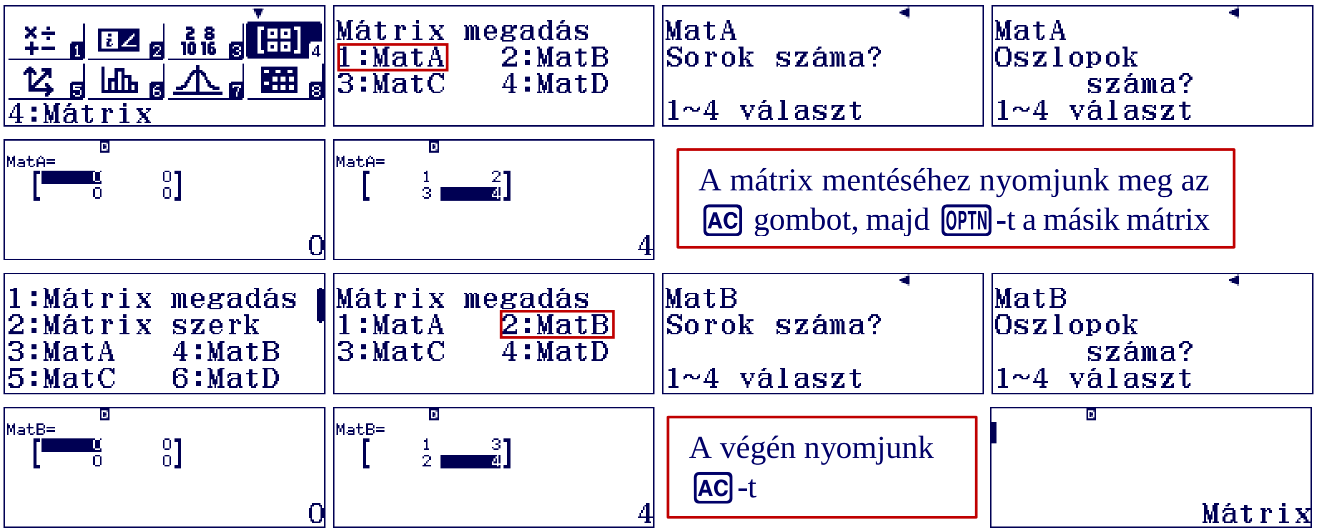
A komplex számhoz változót is rendelhetünk, mert így a műveletek (pl. konjugálás) könnyebben megkaphatók (nem kell minden alkalommal beírni a számot a művelet után).



Megoldás: $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, a további megoldások leolvashatók a fenti ábrákon.

8. Mátrixok (bevezetés)

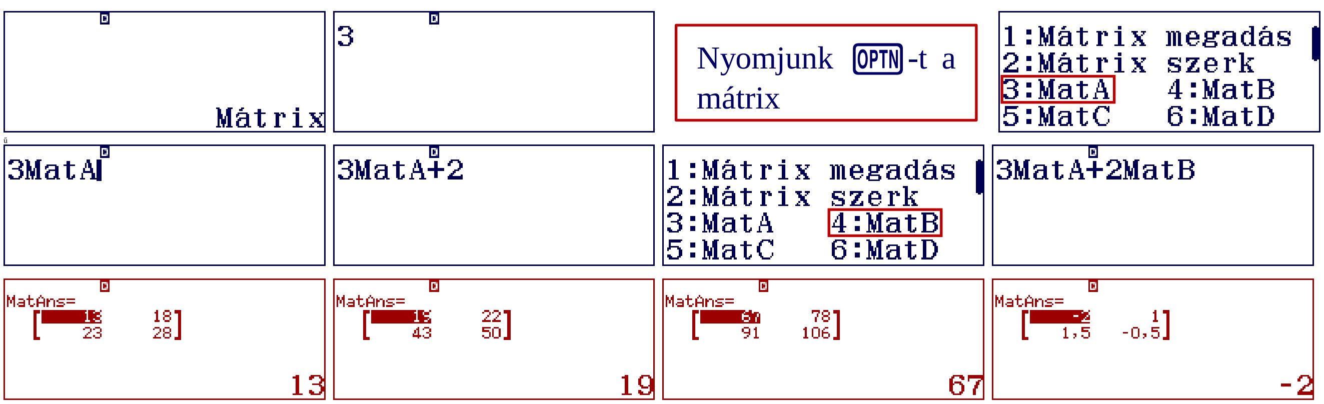
Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$. Számoljuk ki: $3A+2B$, AB, B^2, A^{-1}.



A mátrix mentéséhez nyomjunk meg az AC gombot, majd OPTN -t a másik mátrix

A végén nyomjunk AC -t

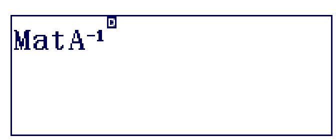
Számoljuk ki: $3A+2B$:



Nyomjunk OPTN -t a mátrix

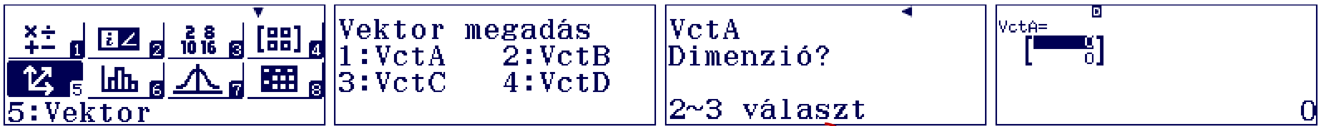
Megoldás: $3A+2B=\begin{pmatrix}13 & 18\\ 23 & 28\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}67 & 78\\ 91 & 106\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}$

Megjegyzés: az inverz mátrixhoz használjuk a x^{-1} gombot.



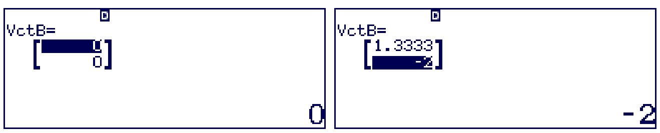
9. Vektorok (bevezetés)

Példa: Számolással mutassuk meg, hogy a következő vektorok merőlegesek egymásra: $\vec{a}=(3;2)$ and $\vec{b}=\left(\frac{4}{3};-2\right)$. Számoljuk ki az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát.

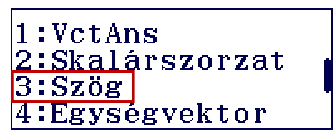


Az B vektorhoz nyomjunk OPTN -t

Válasszuk a 2 -t



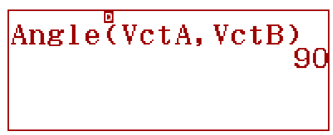
OPTN majd 3



Nyomjunk OPTN -t a vektorok beillesztéséhez.

A vektorok elválasztásához a sárga vesszőt

használjuk



Skaláris szorzat:

Megoldás: Megmutattuk, hogy a két vektor által bezárt szög 90°. A skaláris szorzat 0.

10. A Casio fx-991CE X funkcióinak listája

FŐ FUNKCIÓK

- Változók listája
- Prímfaktorizáció
- Véletlen egész számok generálása
- Koordináta transzformáció
- Hatvány műveletek
- Trigonometria
- Tört műveletek
- Kombináció és permutáció
- 9 változó
- Statisztika (Lista alapú STAT adat szerkesztés, szórás, regresszió analízis, Statisztikai lista)
- Táblázat funkció
- Művelet visszavonás (UNDO)
- Ezres tagolás
- Többsoros kijelző

KIEGÉSZÍTŐ FUNKCIÓK

- Táblázatkezelés
- Integrálás
- Differenciálás
- CALC funkció
- SOLVE funkció
- Műveletek komplex számokkal
- n alapú számrendszerek
- Egyenletmegoldás
- Mátrixszámítás
- Vektorszámítás
- Tudományos állandók
- Metrikus konverzió
- Felsőbb statisztikai eloszlás számítások
- Egyenlőtlenségek
- Arány számítás
- QR Kód
- Mérnöki szimbólumok